МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МЭИ»

# Подготовка к прохождению теоретического этапа Московского конкурса межпредметных навыков и знаний «Интеллектуальный мегаполис. Потенциал» (номинация «Инженерный класс», Инженерно-техническое направление, задания №№ 1, 2, 8, 9, 11, 12)

Методические рекомендации для учащихся предпрофессиональных классов
и учителей профильных предметов (физика, математика, информатика)

Утверждено Факультетом довузовской подготовки

Москва
2024 год

**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ**

**по решению заданий №№1, 8 и 11 по предмету «Математика» в рамках теоретического этапа Московского конкурса межпредметных навыков и знаний «Интеллектуальный мегаполис. Потенциал», номинация «Инженерный класс», Инженерно-техническое направление**

Методические рекомендации по использованию демонстрационных материалов и проведению теоретического этапа Московского конкурса межпредметных навыков и знаний «Интеллектуальный мегаполис. Потенциал» (далее – Конкурс) предназначены для участников Конкурса и учителей, ведущих профильную подготовку учащихся предпрофессиональных классов, с целью разъяснения хода решения заданий демонстрационного варианта по предмету «Математика», возможных трудностей при подготовке к Конкурсу, типичных ошибок, методики оценки.

Рассмотрим решение ***задания №8*** демонстрационного варианта.

*Траектория движения головки распылителя на плоскости описывается кубическим многочленом* $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. *Его график симметричен относительно начала координат и проходит через точки (2, 0) и (3, 30). Определите, чему равно значение этого многочлена при* $x = -1$. *В поле ответа запишите число с одной значащей цифрой после запятой (если потребуется, то с округлением).*

Для поиска ответа на вопрос задания необходимо восстановить многочлен, иными словами, найти все его коэффициенты. Предварительно воспользуемся информацией о симметрии графика для упрощения поставленной задачи. Во-первых, из указанной симметричности следует, что график проходит через начало координат. Во-вторых, точка $(-2, 0)$, симметричная точке $(2, 0)$, также принадлежит графику. Таким образом, числа 0, 2 и -2 являются корнями искомого многочлена, поэтому его следует искать в виде

$$P(x) = Ax(x-2)(x+2).$$

Коэффициент A найдем из условия $P(3) = 30$. Подставляя $x = 3$ в формулу, получаем уравнение

$$P(3) = A \cdot 3 \cdot 1 \cdot 5 = 30,$$

откуда $A = 2$. Многочлен найден. Остаётся подставить в него нужное значение аргумента.

$$P(-1) = 2 \cdot (-1) \cdot (-3) \cdot (1) = 6.$$

Можно было осуществить поиск многочлена без упрощения его формулы. Из условий симметрии выше получены три точки, через которые проходит график многочлена: $(-2, 0)$, $(0, 0)$, $(2, 0)$. Ещё одна точка на графике задана в условии явно. Эти данные позволяют составить систему из четырёх линейных уравнений для поиска четырёх коэффициентов.

$$\begin{cases} P(0) = d = 0, \\ P(-2) = -8a + 4b - 2c + d = 0, \\ P(2) = 8a + 4b + 2c + d = 0, \\ P(3) = 27a + 9b + 3c + d = 30. \end{cases}$$

Из первого уравнения сразу находим $d = 0$. Учитывая это и складывая второе и третье уравнение, получаем

$$8b = 0,$$

откуда $b = 0$. Теперь два последних уравнения дают систему

$$\begin{cases} 8a + 2c = 0, \\ 27a + 3c = 30. \end{cases}$$

Из верхнего уравнения можно выразить $c = -4a$ и подставить в нижнее. Это даёт $15a = 30$, откуда $a = 2$ и, далее, $c = -8$. Система полностью решена.

Подставляя полученные коэффициенты в общую формулу многочлена, получаем

$$P(x) = 2x^3 - 8x.$$

При указанном в вопросе значении аргумента вычисляем значение $P(-1) = -2 + 8 = 6$. Записываем полученный ответ с учётом требуемого формата представления результата.

Ответ: 6,0.

Задание №8 считается выполненным, если ответ учащегося совпал с эталоном. Выполненное задание оценивается 8-ю баллами.

Для успешного решения данной задачи необходимо хорошо представлять свойства кубического многочлена и его графика. Они кратко перечислены после разбора задания №11 среди свойств основных элементарных функций.

Дополнительно следует помнить эквивалентные формы записи кубического многочлена. В случае, когда известны три его корня $x_1$, $x_2$, $x_3$ (некоторые из этих значений могут совпадать), многочлен можно записать в виде $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$. Если же известен только один корень $x_1$, то многочлен можно представить в форме $P(x) = a(x - x_1)(x^2 + bx + c)$, где стоящий во вторых скобках квадратный трёхчлен может как иметь корни, так и не иметь их.

В процессе решения необходимо обратить внимание на следующие моменты, которые могут оказаться источниками **типичных ошибок**.

1. Кубический многочлен определяется четырьмя параметрами. В классической его записи это – коэффициенты при степенях аргумента. Поэтому необходимо искать четыре различных уравнения для их поиска.
2. Различные формы записи кубического многочлена (отмеченные выше) должны быть эквивалентны друг другу. Важно не терять старший коэффициент, т.к. многочлен не обязательно должен быть приведённым.
3. После получения многочлена крайне рекомендуется сделать проверку: подставить все заданные в условии аргументы и сверить с соответствующими им значениями.

Перейдём к рассмотрению ***задания №11*** демонстрационного варианта.

*Зависимость интенсивности P мыслительной деятельности робота-проектировщика от разности потенциалов на белой и зелёной клеммах $x$ описывается формулой $P(x) = e^x + x$ (прикладной смысл имеют как положительные, так и отрицательные значения). Определите, может ли* *эта интенсивность быть равна* $-2$. *Если не может, то укажите в поле ответа ноль. Если может, то укажите целую часть минимально возможного значения* $x$, *при котором этот уровень достигается.*

Решение поставленной задачи сводится к задаче о корнях функции $f(x) = e^x + x + 2$, поскольку уравнение $P(x) = -2$ эквивалентно уравнению $f(x) = 0$. На первом этапе решения необходимо выяснить, имеет ли функция $f(x)$ корни и, если имеет, то сколько. При отсутствии корней задача будет решена, ответом будет число ноль. Если же корни есть, то следует выбрать самый левый (минимальный) из них. Важно отметить, что искать значение нужного корня не требуется, достаточно определить, между какими соседними целыми числами он расположен. Меньшее из них будет являться ответом, так как для любого числа $x$, являющегося внутренней точкой отрезка $[a, a+1]$, целая часть $x$ равна $a$ (а также для $x = a$).

Вопрос о наличии корней можно решать по-разному. Например, можно заметить, что слагаемые $e^x$ и $x$ являются монотонно возрастающими величинами и, следовательно, вся функция $f(x) = e^x + x + 2$ также монотонно возрастает. Если монотонная функция имеет корень, то только один. Далее заметим, что областью значений $f(x)$ является вся числовая ось: при неограниченном возрастании аргумента функция $f(x)$ также неограниченно возрастает, а при неограниченном убывании также неограниченно убывает. Таким образом, она имеет корень, причём один.

Вычислим $f(0) = 3 > 0$. Полученное значение положительно, следовательно, корень расположен левее нуля. Вычисляем последовательно $f(-1) = e^{-1} + 1 > 0$, $f(-2) = e^{-2} > 0$, $f(-3) = e^{-3} - 1 < 0$. Останавливаемся при получении отрицательного значения. Из вычислений видно, что корень находится на отрезке $[-3, -2]$, левая граница которого является целой частью для всех внутренних точек отрезка, в том числе и для находящегося на нём корня. Ответ получен.

Альтернативным решением вопроса о наличии и количестве корней может быть графический. Уравнение $e^x + x + 2 = 0$ эквивалентно уравнению $e^x = -x - 2$. Построим графики его левой и правой частей (рис. 1).

Левая часть уравнения есть монотонно возрастающая функция, а правая часть – монотонно убывающая, поэтому они могут иметь только одно пересечение. Это пересечение мы видим на графике (рис. 1). Остаётся посмотреть, между какими целыми числами оно находится. Это можно сделать с помощью тех же вычислений, которые описаны выше.

Ответ: – 3.

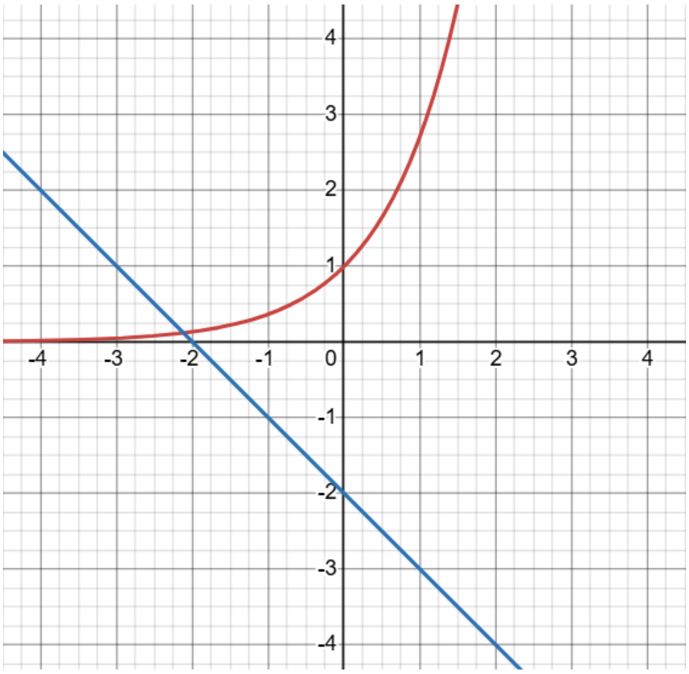



Рис. 1. Графический метод решения задания

Задание №11 считается выполненным, если ответ учащегося совпал с эталоном. Выполненное задание оценивается в 8 баллов.

В процессе решения необходимо обратить внимание на следующие моменты, которые могут оказаться источниками **типичных ошибок**.

1. Необходимо понимать связь между фактами смены знака и наличием корней. Отрезок, на концах которого функция принимает значения разных знаков, может содержать несколько корней.

2. Функция может иметь корень, всюду сохраняя при этом свой знак (как, например, парабола $y = x^2$ в нуле).

3. Анализ корней функции часто может быть сведён к анализу пересечения графиков двух функций более простой структуры и наоборот.

4. Необходимо помнить, что функция может иметь более одного корня. При обнаружении одного из них необходимо убедиться, что левее знак функции не меняется.

5. Необходимо грамотно работать с комбинациями монотонных функций и следить за направлением монотонности. Не всегда при сложении функций она сохраняется.

Также для выполнения подобного задания необходимо хорошо разбираться в свойствах элементарных функций и уметь строить эскизы их графиков. Приведём краткую информацию о них.

**График линейной функции**

Линейная функция задаётся уравнением $y = kx + b$, где $k$ и $b$ – любые действительные числа. Графиком линейной функции является прямая. Пример графика линейной функции $y = 2x - 1$ приведён на рис. 2.

Если $k = 0$, то функция $y = b$ называется постоянной. Её графиком является прямая, параллельная оси OX.

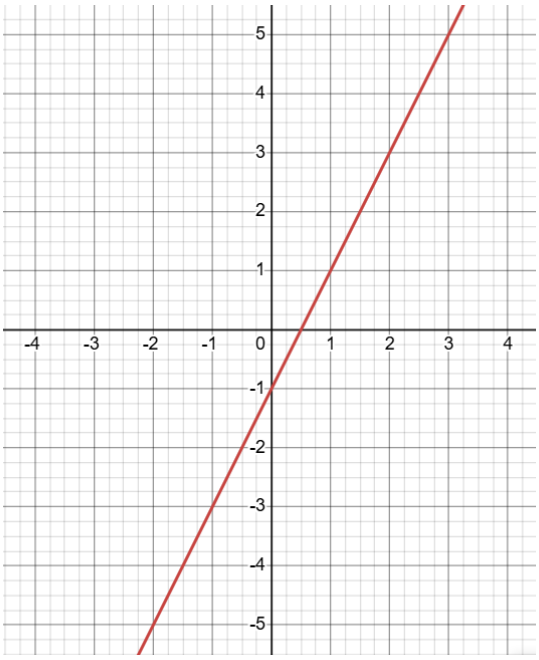


Рис. 2. График линейной функции $y = 2x - 1$

Если $b = 0$, то формула $y = kx$ задаёт прямо пропорциональную зависимость. Графиком такой функции является прямая, проходящая через начало координат.

Верно и обратное – любая прямая, не параллельная оси OY, является графиком некоторой линейной функции.

Число $k$ называется угловым коэффициентом прямой, оно равно тангенсу угла между прямой и положительным направлением оси OX.

Перечислим свойства линейной функции при $k \neq 0$.

1) Область определения функции – множество всех действительных чисел $(-\infty, \infty)$.

2) Функция $y = kx + b$ не ограничена.

3) Функция $y = kx + b$ ни чётна, ни нечётна при $b \neq 0$, нечётна при $b = 0$.

4) При $k > 0$ функция монотонно возрастает, а при $k < 0$ монотонно убывает на всей области определения.

**График квадратичной функции**

График квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ представляет собой параболу. Рассмотрим простейший случай $y = x^2$. График такой функции приведён на рис. 3.

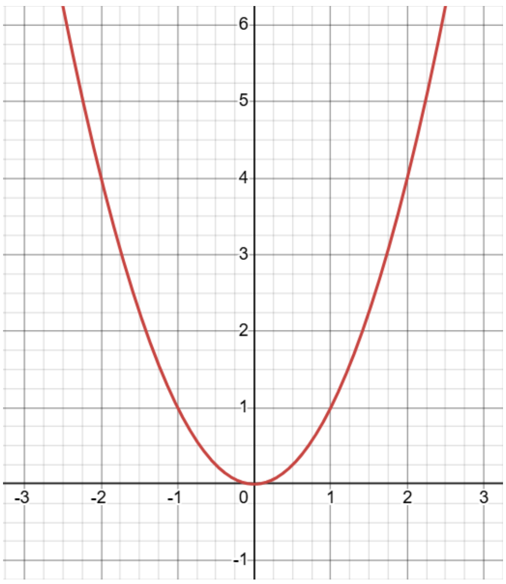


Рис. 3. График квадратичной функции $y = x^2$

Обозначим свойства функции $y = x^2$.

1) Область определения функции – множество всех действительных чисел $(-\infty, \infty)$.

2) Область значений функции – положительная полупрямая $[0, \infty)$.

3) Функция $y = x^2$ является чётной.

4) На промежутке $(-\infty, 0)$ функция монотонно убывает. На промежутке $(0, +\infty)$ функция монотонно возрастает.

5) В точке $x = 0$ достигает минимального значения. Точка с координатами $(0, 0)$ является вершиной параболы.

6) Функция непрерывна на всей области определения.

Для квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ справедливо следующее: если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх, если $a < 0$, то ветви параболы направлены вниз. Рассмотрим для примера график функции $y = -x^2 + 4x - 3$ (рис. 4).

Свойства функции $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ следующие.

1) Область определения функции – множество всех действительных чисел $(-\infty, \infty)$.

2) Область значений функции зависит от знака коэффициента $a$.

3) В общем случае функция $y = ax^2 + bx + c$ не является ни чётной, ни нечётной. Осью симметрии параболы является прямая $x = -b/2a$. Функция будет чётной только в случае, когда эта прямая совпадает с осью OY, т.е. при $b = 0$.

4) При $a > 0$ функция монотонно убывает на промежутке $(-\infty, -b/2a)$ и монотонно возрастает на промежутке $(-b/2a, \infty)$. При $a < 0$ функция монотонно возрастает на промежутке $(-\infty, -b/2a)$ и монотонно убывает на промежутке $(-b/2a, \infty)$.

5) В точке $x = -b/2a$ при $a < 0$ достигается максимум, а при $a > 0$ – минимум функции.

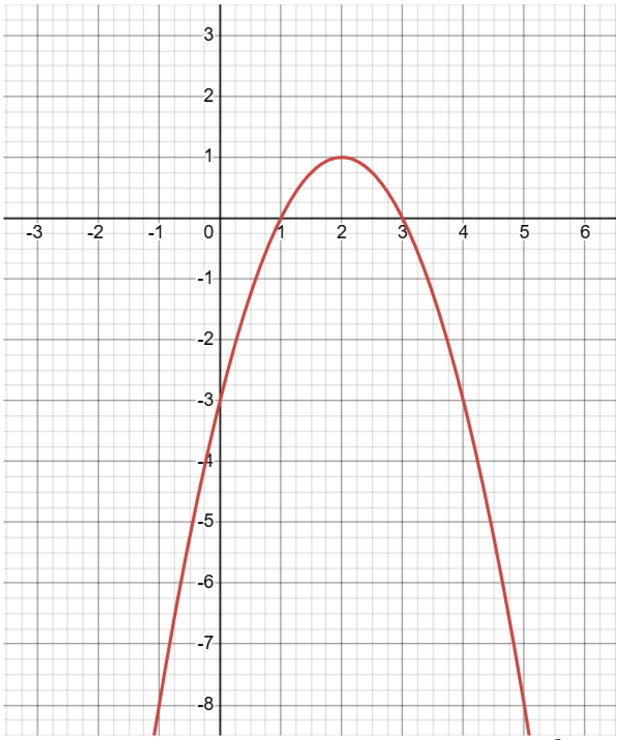



Рис. 4. График квадратичной функции $y = -x^2 + 4x - 3$.

6) Функция непрерывна на всей области определения.

7) Парабола пересекает ось ординат в точке $(0, c)$. Если квадратный трёхчлен имеет действительные корни $x_1 \neq x_2$, то парабола пересекает ось абсцисс в точках $(x_1, 0)$ и $(x_2, 0)$. При $x_1 = x_2$ парабола касается оси абсцисс в точке $(x_1, 0)$. Если действительных корней нет, парабола не имеет общих точек с осью абсцисс.

**График кубической функции**

Кубическая парабола задаётся функцией $y = x^3$, её график приведён на рис. 5.

Свойства функции $y = x^3$ обозначены ниже.

1) Область определения функции – множество всех действительных чисел $(-\infty, \infty)$.

2) Функция $y = x^3$ не ограничена.

3) Данная функция является нечётной.

4) Функция $y = x^3$ возрастает на всей области определения.

5) Функция непрерывна на всей области определения.

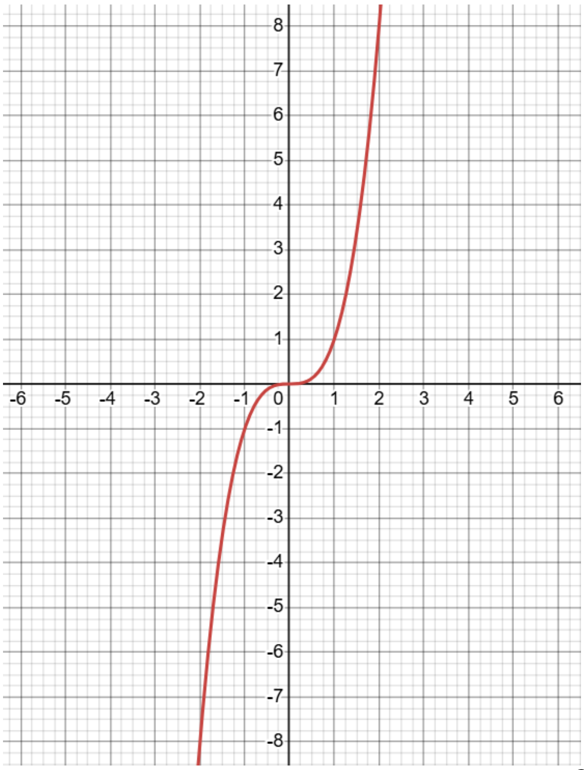



Рис. 5. График кубической функции $y = x^3$

Рассмотрим график функции $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$. Например, для функции $y = -x^3 + 3x^2 - 2$ график имеет следующий вид (рис. 6).

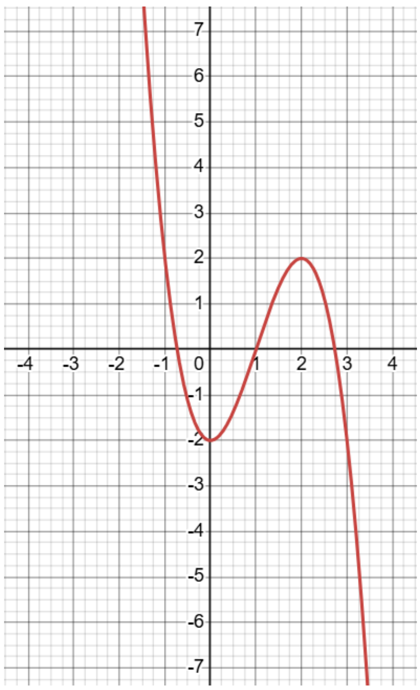



Рис. 6. График кубической функции $y = -x^3 + 3x^2 - 2$

В этом примере коэффициент при старшей степени $a < 0$, поэтому график развёрнут «наоборот».

График функции $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ может иметь различный вид. Он всегда пересекает ось OX по крайней мере в одной точке, но может иметь и две, и три точки пересечения. Всегда имеет ровно одну точку перегиба. Может либо совсем не иметь локальных экстремумов, либо имеет один максимум и один минимум.

### График функции $y = \sqrt{x}$

График этой функции представляет собой одну из ветвей параболы (рис. 7).

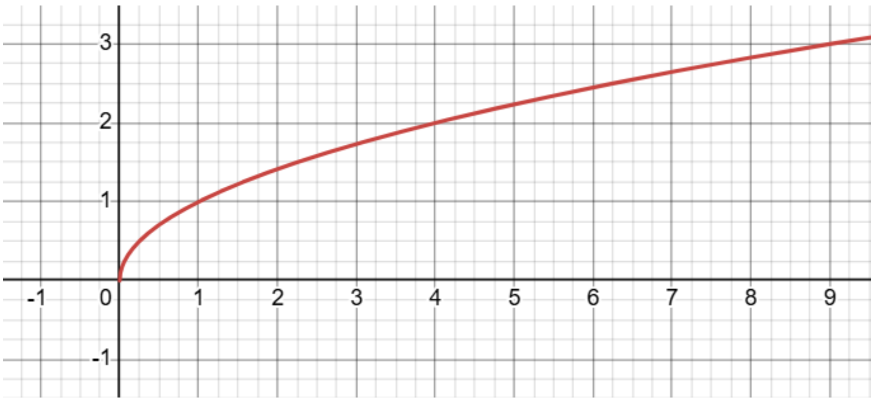



Рис. 7. График функции $y = \sqrt{x}$

Приведём свойства функции $y = \sqrt{x}$.

1) Область определения функции – положительная полупрямая $[0, \infty)$.

2) Область значений функции – также положительная полупрямая $[0, \infty)$.

3) Функция возрастает на всей области определения.

4) Функция непрерывна на всей области определения.

### График гиперболы

В простейшем случае гиперболу образует график функции $y = \frac{1}{x}$. Он приведён на рис. 8.

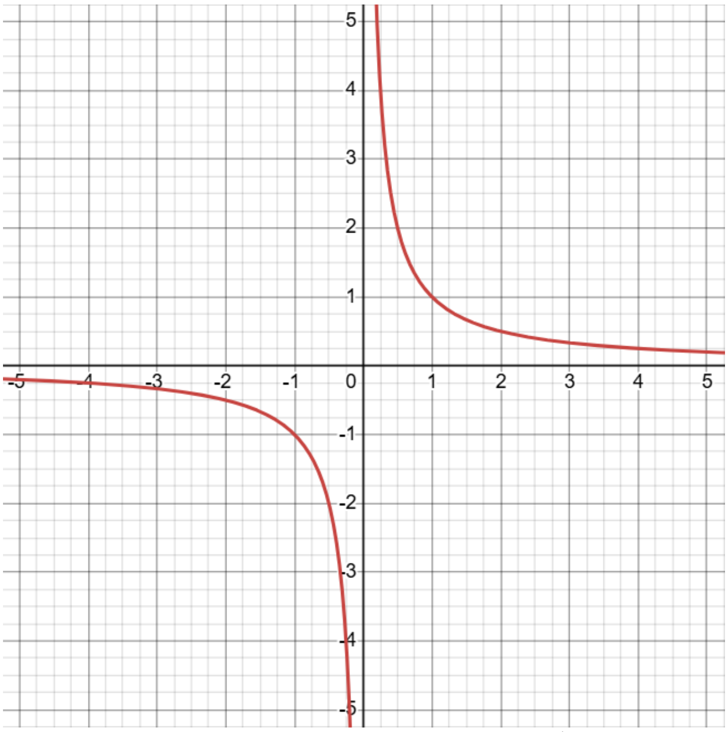



Рис. 8. График функции $y = \frac{1}{x}$

Перечислим свойства функции $y = \frac{1}{x}$.

1) Область определения функции $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

2) Область значений функции также $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

3) Функция $y = \frac{1}{x}$ является нечётной.

4) В точке $x = 0$ функция не определена. При $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$ $y \to 0$. При $x \to 0$ слева $y \to -\infty$, при $x \to 0$ справа $y \to +\infty$.

График функции вида $y = \frac{a}{x}$ $(a \neq 0)$ представляет собой две ветви гиперболы. Если $a > 0$, то гипербола расположена в первой и третьей координатных четвертях. Если $a < 0$, то гипербола расположена во второй и четвёртой координатных четвертях.

**График показательной функции**

Рассмотрим график экспоненциальной функции $y = e^x$ (рис. 9).

Свойства функции $y = e^x$ следующие.

1) Область определения функции – множество всех действительных чисел $(-\infty, \infty)$.

2) Область значений функции – положительный интервал $(0, \infty)$.

3) Функция непрерывна на всей области определения.

4) Функция возрастает на всей области определения.

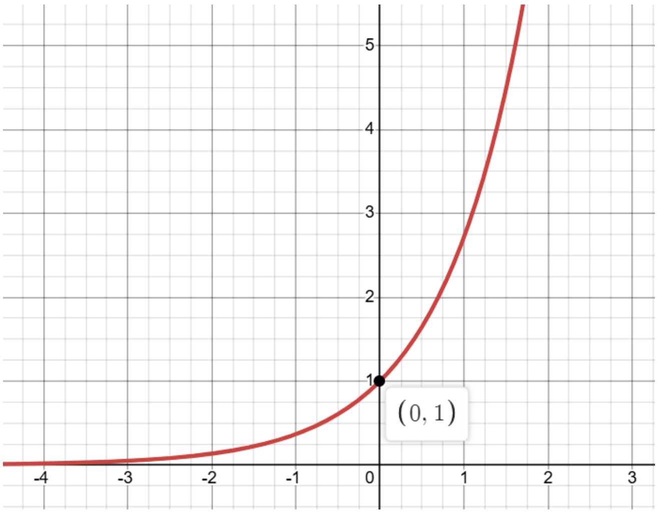



Рис. 9. График функции $y = e^x$

Ноль не включается в область значений. Экспонента – это положительная функция, то есть для любого $x$ справедливо неравенство $y = e^x > 0$, а сам график экспоненты полностью расположен в верхней полуплоскости.

Функция не ограничена сверху. Ось ОХ является горизонтальной асимптотой для графика функции $y = e^x$, если $x \to -\infty$.

Принципиально такой же вид имеет любая показательная функция $y = a^x$, если $a > 1$. Функции $y = 2^x$, $y = 3^x$, $y = 10^x$ будут отличаться только крутизной наклона графика, причём, чем больше основание, тем круче будет график. Обратим внимание, что во всех случаях графики проходят через точку $(0, 1)$, то есть $a^0 = 1$.

Теперь рассмотрим случай, когда основание $0 < a < 1$. График этой функции представляет ту же экспоненту, только развёрнутую относительно оси OY. Для примера рассмотрим функцию $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x = (2^{-1})^x = 2^{-x}$. Её график представлен на рис. 10.

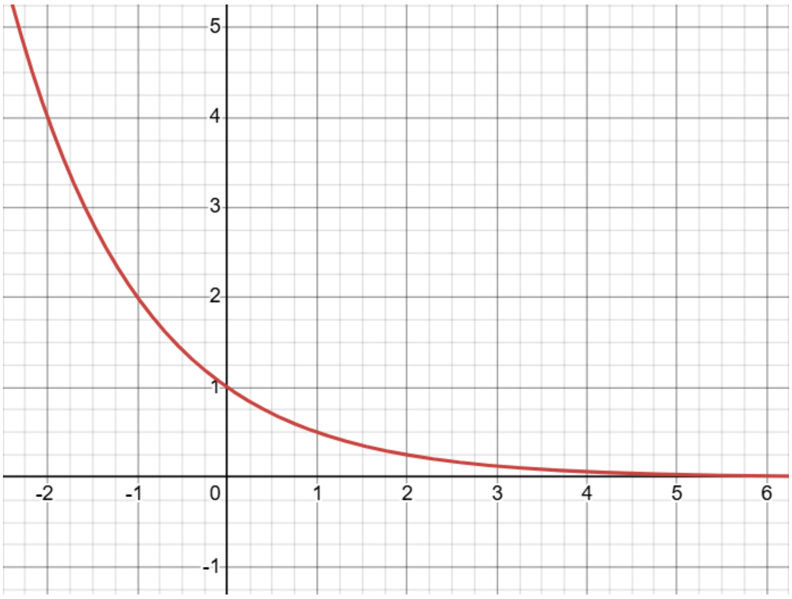


Рис. 10. График функции $y = 2^{-x}$

**График логарифмической функции**

Рассмотрим функцию с натуральным логарифмом $y = \ln x$, график которой изображён на рис. 11.

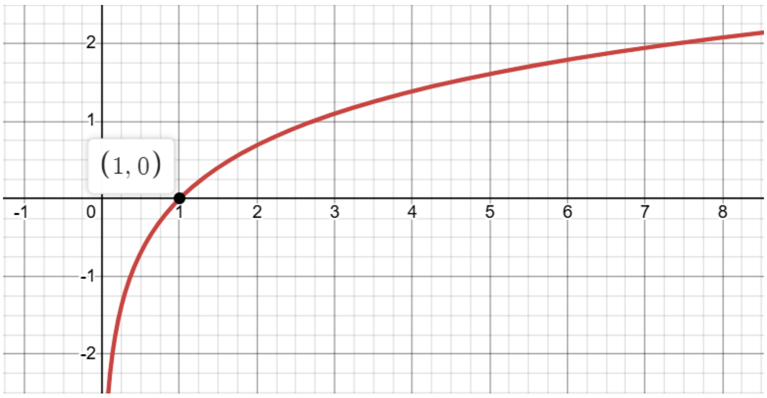


Рис. 11. График функции $y = \ln x$

Перечислим свойства функции $y = \ln x$.

1) Область определения функции – положительный интервал $(0, \infty)$.

2) Область значений функции – множество всех действительных чисел $(-\infty, \infty)$.

3) Ось OY является вертикальной асимптотой для графика функции $y = \ln x$ при $x \to 0$ справа.

4) Функция непрерывна на всей области определения.

5) Функция возрастает на всей области определения.

Принципиально так же выглядит график логарифма при основании $a > 1$. При этом, чем больше основание, тем более пологим будет график.

При $a > 1$ функция монотонно возрастает, при $0 < a < 1$ – убывает. Графики функций с основаниями $a$ и $\frac{1}{a}$ симметричны относительно оси OX и имеют ось OY асимптотой.

Обязательно нужно знать и помнить типовое значение логарифма $\log_a 1 = 0$.

### График синуса

Построим график функции $y = \sin x$. Данная линия называется синусоидой (рис. 12).

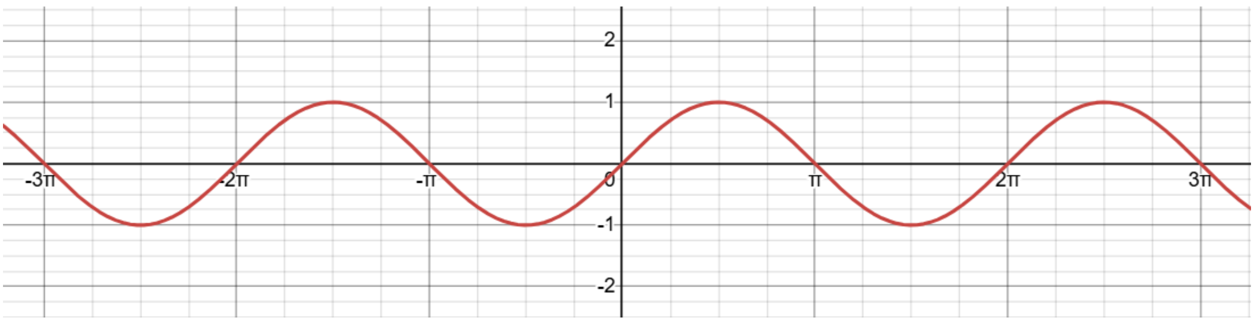


Рис. 12. График функции $y = \sin x$

Свойства функции $y = \sin x$ перечислены ниже.

1) Область определения функции – множество всех действительных чисел $(-\infty, \infty)$.

2) Область значений функции – отрезок $[-1, 1]$.

3) Функция $y = \sin x$ является периодической с периодом $2\pi$.

4) Функция $y = \sin x$ является нечётной.

5) Функция $y = \sin x$ имеет точки максимума $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ и точки минимума $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, где $k$– целое.

6) Функция непрерывна на всей области определения.

**График косинуса**

Построим график функции $y = \cos x$ (рис. 13).

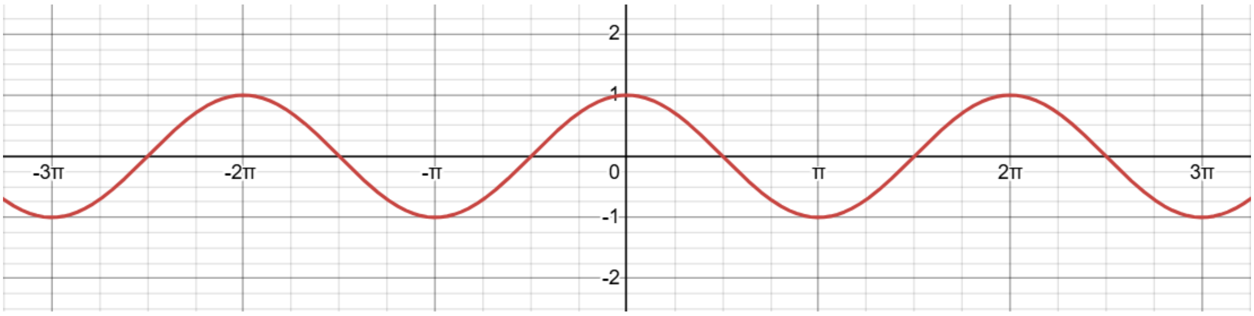



Рис. 13. График функции $y = \cos x$

Так как $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$, то график косинуса – это синусоида, сдвинутая вдоль оси OX на $\pi/2$ влево.

Свойства функции $y = \cos x$ следующие.

1) Область определения функции – множество всех действительных чисел $(-\infty, \infty)$.

2) Область значений функции – отрезок $[-1, 1]$.

3) Функция $y = \cos x$ является периодической с периодом $2\pi$.

4) Функция $y = \cos x$ является чётной.

5) Функция $y = \cos x$ имеет точки максимума $2\pi k$ и точки минимума $(2k + 1)\pi$, где $k$ – целое.

6) Функция непрерывна на всей области определения.

**Графики тангенса и котангенса**

Начертим график функции $y = \operatorname{tg} x$ (рис. 14).

Назовём свойства функции $y = \operatorname{tg} x$.

1) Область определения функции – бесконечное число открытых интервалов $(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n)$, где $n$ – целое. В каждом из этих интервалов функция монотонно возрастает и имеет ноль в точках $\pi n$.

2) Область значений функции – множество всех действительных чисел $(-\infty, \infty)$.

3) Функция $y = \operatorname{tg} x$ является периодической с периодом $\pi$.

4) Функция $y = \operatorname{tg} x$ является нечётной.

5) В точках $\frac{\pi}{2} + \pi n$ график имеет вертикальные асимптоты.

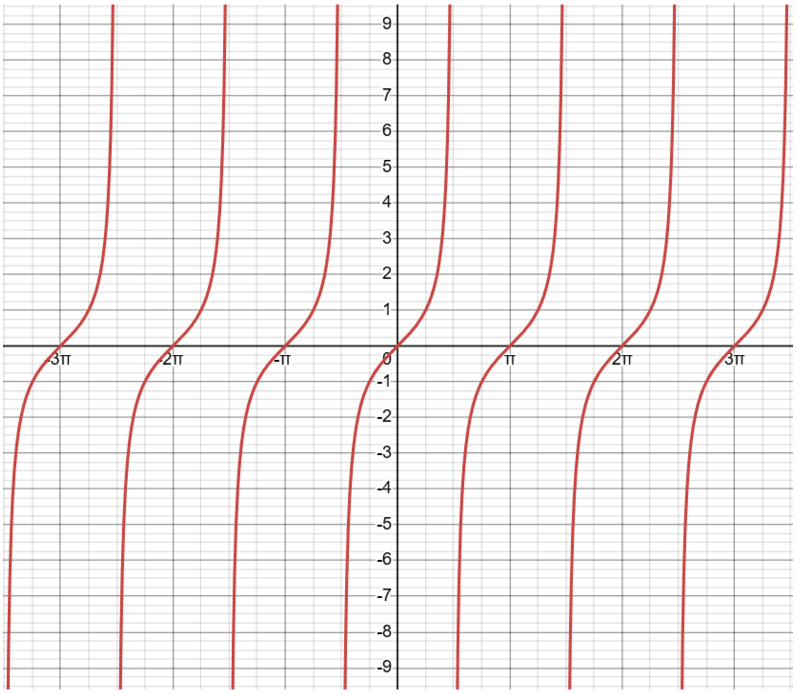



Рис. 14. График функции $y = \operatorname{tg} x$

Котангенс связан с тангенсом тригонометрическим соотношением $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$, его график приведён на рис. 15.

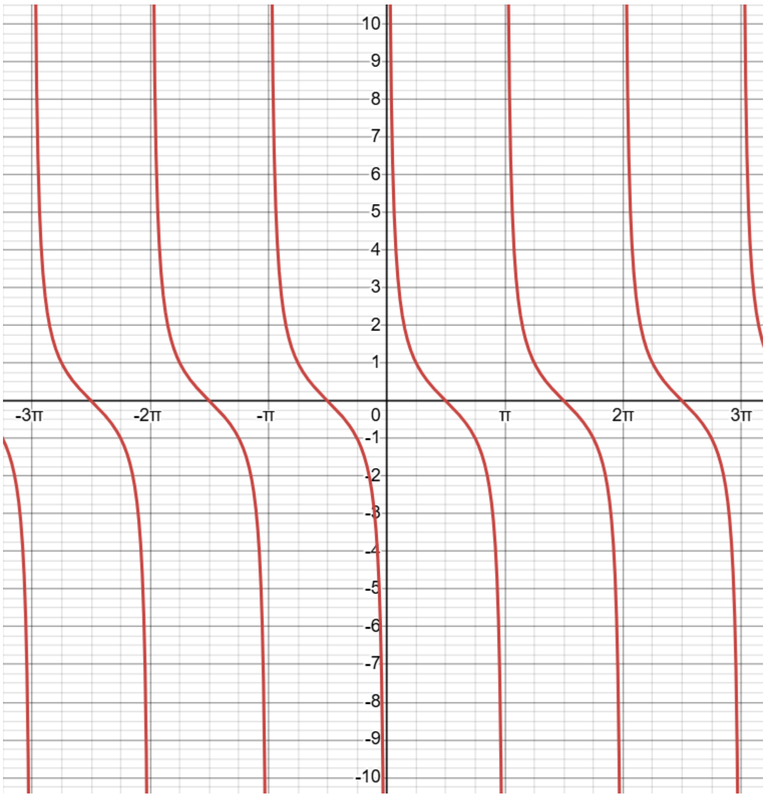



Рис. 15. График функции $y = \operatorname{ctg} x$

Ниже обозначим свойства функции $y = \operatorname{ctg} x$.

1) Область определения функции – бесконечное число открытых интервалов $(\pi n, (n+1)\pi)$, где $n$ – целое. В каждом из этих интервалов функция монотонно убывает и имеет ноль в точках $\frac{\pi}{2} + \pi n$.

2) Область значений функции – множество всех действительных чисел $(-\infty, \infty)$.

3) Функция $y = \operatorname{ctg} x$ является периодической с периодом $\pi$.

4) Функция $y = \operatorname{ctg} x$ является нечётной.

5) В точках $\pi n$ график имеет вертикальные асимптоты.

Перечисленных свойств достаточно для решения задачи с аналогичным условием, но другими функциями в формулах.

Для получения 8-ми баллов участнику достаточно решить любое из двух заданий (№8 или №11) на выбор.

Перейдем к решению ***задания №1*** демонстрационного варианта.

*Укажите точку на поверхности многогранника, для которой все три проекции на чертеже (рис. 16) указаны верно.*

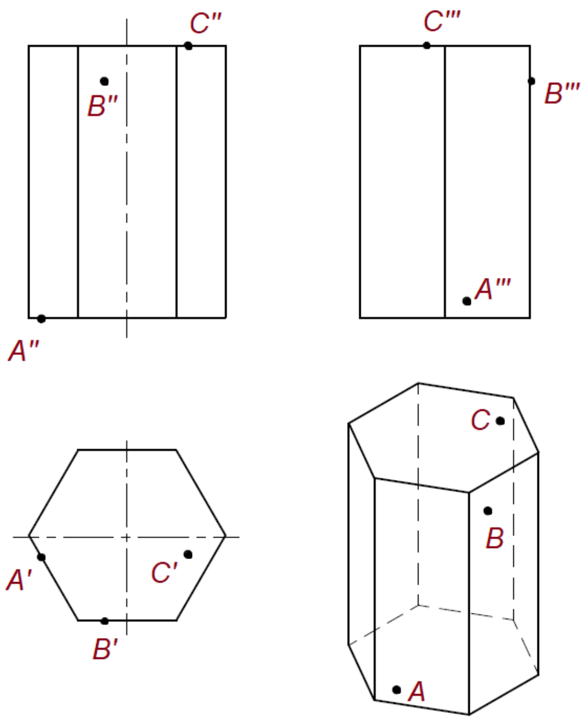



Рис. 16. Иллюстрация к условию задания №1

*Выберите один верный вариант ответа:*

*1) A;*

*2) B;*

*3) C.*

На рисунке представлены три основных вида многогранника (шестигранной призмы), а именно вид спереди, сверху и слева и аксонометрическая проекция. Все точки проставлены на поверхности многогранника, т.е. принадлежат различным граням.

Начинаем последовательно проверять правильность проставленных проекций точек, начиная с точки А. На виде спереди, где присутствует три грани, мы видим, что проекция точки А’’ принадлежит нижнему основанию многогранника, что не соответствует изображению на объёмной модели, где она находится чуть выше нижнего основания. Таким образом, данная проекция точки А найдена не верно.

Переходим к точке В. На всех трёх видах её проекции соответствуют позиции точки на объёмной модели. Таким образом, все три проекции точки В найдены верно.

Далее рассмотрим точку С. На виде слева, где присутствует изображение двух граней, мы видим, что проекция точки С’’’ находится в левой стороне, что не соответствует изображению на объёмной модели, на которой точка С находится в правой области. Таким образом, данная проекция точки С найдена не верно.

Верное выполнение задания оценивается 5-ю баллами.

В процессе решения необходимо обратить внимание на следующие моменты, которые могут оказаться источниками **типичных ошибок**.

1. Стоит отслеживать, чтобы одноименные точки на двух соседних проекциях находились на одной линии проекционной связи.

2. Необходимо помнить, что все точки заданы на различных гранях многогранника и не могут находиться внутри его тела.

**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ**

**по решению заданий №№9 и 12 по предмету «Физика»**

**в рамках теоретического этапа Московского конкурса межпредметных навыков и знаний «Интеллектуальный мегаполис. Потенциал», номинация «Инженерный класс», Инженерно-техническое направление**

Методические рекомендации по использованию демонстрационных материалов и проведению теоретического этапа Московского конкурса межпредметных навыков и знаний «Интеллектуальный мегаполис. Потенциал» в номинации «Инженерный класс» (далее – Конкурс) предназначены для участников Конкурса и учителей, ведущих профильную подготовку учащихся предпрофессиональных классов, с целью разъяснения хода решения заданий демонстрационного варианта по предмету «Физика», возможных трудностей при подготовке к Конкурсу, типичных ошибок, методики оценки.

Теоретический этап Конкурса проводится в форме компьютерного тестирования. Во время выполнения работы разрешается использовать непрограммируемый калькулятор, таблицу физических величин. В контрольно-измерительных материалах используются задания повышенного уровня сложности с кратким ответом. Уровень сложности заданий требует от исполнителя следующих привитых умений:

– анализировать и выдвигать предположения;

– составлять уравнения по текстовым формулировкам;

– характеризовать свойства тел, физические явления и процессы, используя физические законы;

– выявлять недостающие или избыточные данные в условии задач, обосновывать выбор метода решения задачи, необходимых законов и формул;

– решать расчётные задачи, выбирая адекватную физическую модель с использованием законов и формул, связывающих физические величины;

– выбирать рациональный способ решения задачи;

– решать алгебраические уравнения и системы;

– последовательно выполнять этапы решения задачи;

– определять размерность физической величины, полученной при решении задачи;

– анализировать полученный результат.

Предложенные в демонстрационном варианте физические задачи имеют следующие усложнения:

– использование понятий и законов из разных разделов механики и электромагнетизма, что делает эти задачи комбинированными и привносит в них межпредметную и прикладную направленность;

– необходимость проанализировать численные данные задачи для определения возможного вида движения или равновесия тел;

– применение многоступенчатых алгебраических преобразований, требующих решения систем линейных уравнений, с последующим вычислением физических величин;

– необходимость одновременного рассмотрения явлений механики и электромагнетизма при определении количества сил, действующих на тело, и записи их величин;

– преобразование единиц физических величин в единицы международной системы СИ и в кратные величины с учётом приставок и множителей.

Рекомендуется организовать решение задач по физике следующим способом:

1. Чтение условия не менее двух раз. Первое – ознакомительное, второе и последующие (при необходимости) – для выяснения конкретных деталей описанного события, составления или изучения рисунка (графика, схемы) и краткой записи условия с переводом значений всех величин в систему СИ (при необходимости).

2. Проникновение в суть рассматриваемого в условии физического явления: выяснение физической теории, описывающей явление, конкретных законов и принципов, основных формул, охватывающих известные и неизвестные величины, приведённые в условии, и физические константы.

3. Установление физической связи между величинами, приведёнными в условии, и неизвестными величинами посредством системы уравнений, учитывая общее требование: количество уравнений в системе должно быть не меньше общего числа неизвестных физических величин в ней.

4. Решение системы уравнений и получение конечной формулы, выражающей искомую неизвестную величину через величины, указанные в условии, и известные константы.

5. Выполнение численных расчётов, приведение полученного результата к требуемому по условию задачи формату (с применением стандартных множителей и приставок) и проверка полученного значения.

При краткой записи условия задания необходимо сразу же выяснить размерность физических величин, перевести их в систему СИ. Иногда при решении задания не требуется краткой записи условия задачи, но это создаст трудности в построении математической модели физической ситуации задачи. Поэтому рекомендуется записывать «Дано» подробно и проводить анализ текста задания, корректный перевод текстовой формы условия физической задачи в математическую форму, правильное указание размерностей физических величин. Если задание решается в общем виде, то последний пункт рекомендаций по записи «Дано» допускается пропустить.

Далее идёт самый сложный этап – построение физической модели ситуации задачи. В физической модели отражается основная идея задания. В большинстве задач из разных разделов физики допускается возможность схематического или графического изображения физической ситуации, описанной в задаче. Даже если в условии этого не требуется, рисунок часто оказывается полезным. В предлагаемых задачах эта модель имеет вид чертежа или схемы, иллюстрирующей механическое движение или равновесие тела или системы тел. Если рисунок прилагается к задаче в готовом виде, то все усилия должны быть направлены на его анализ и внесение необходимых обозначений физических величин (сил, ускорений и т. п.) с целью построения математической модели движения тел, записи необходимых уравнений и их преобразования к виду, оптимальному для решения.

В результате анализа физической модели необходимо записать базовые формулы физических понятий и законы, которые планируется использовать. Нужно описать каждую вновь вводимую переменную (известную или неизвестную) и указать, какой буквой она обозначается. Должен быть понятен смысл всех физических величин. Особенно это касается величин, которые обозначаются одинаковыми греческими или латинскими буквами (время и температура, электрический заряд и количество теплоты и т. п.). Необходимо их чёткое разграничение для верного подсчёта известных и неизвестных физических величин в задаче.

При описании решения учащиеся должны указать названия всех законов и границы, в которых они применяются. Важно правильно указать связи между законами, проиллюстрировать каждую связь математическими уравнениями. После построения системы алгебраических уравнений в явном или неявном виде (знак системы уравнений учащиеся могут не ставить), математическая модель решения задачи считается построенной. Нужно чёткое осознание учащимися, что число уравнений должно быть равно числу неизвестных физических величин.

В дальнейшем решение задачи предполагает работу с алгебраическими уравнениями. На первое место в этом случае ставится знание математических формул, умения их преобразовывать, т.е. собственно математические умения.

Важно уметь объяснять каждую математическую выкладку и логический переход так, чтобы была понятна логика решения: из какой формулы выражается конкретная физическая величина, куда она подставляется, какие происходят сокращения и преобразования формулы.

На следующем этапе решения задачи получают численное значение физических величин. Нужно проследить, чтобы вновь вводимые при построении модели постоянные были выражены в системе СИ и после проведения расчётов учащиеся получили результат в стандартном виде.

После получения численного результата его значение проверяется на соответствие физической реальности – результат должен быть разумным, согласовываться с условием задачи, искомая формула иметь соответствующую размерность и находиться в объективных границах этой величины, заданной физической реальностью. Необходимо сделать проверку разными способами: по размерности искомой физической величины, по решению задачи другим способом (если таковое возможно) и т. п.

Если задача предполагает несколько вариантов решения, то наиболее ценным будет тот, который предполагает самое рациональное решение – наиболее короткое, с одной стороны, и наиболее обоснованное – с другой. Только после этого учащийся переходит к записи ответа и завершению задачи.

Ученик может улучшить эффективность решения, если будет примерно представлять, насколько разные способы решения задач отличаются по трудоёмкости и по времени. Поэтому желательно в процессе подготовки рассмотреть с учениками все возможные варианты.

Проведём анализ решения заданий демонстрационного варианта.

***Задание №9.*** *Два деревянных бруска связаны невесомой нерастяжимой нитью как показано на рис. 17. Брусок массой* $m_1$ *= 0,3 кг лежит на наклонной плоскости, угол наклона плоскости к горизонту* $\alpha$ *= 30˚, коэффициент трения между бруском и плоскостью* $\mu$ *= 0,2. Брусок массой* $m_2$ *= 0,5 кг привязан к концу нити, который переброшен через невесомый свободно вращающийся блок, установленный на вершине плоскости. В центре бруска массой* $m_1$ *имеется отверстие, в которое жёстко вставлен невесомый проводящий стержень длинной* $l$ *= 0,2 м, по которому течёт ток* $I$ *= 5 А, стержень расположен параллельно наклонной плоскости и* *перпендикулярно нити. Вся система находится в вертикальном однородном магнитном поле с индукцией B = 500 мТл. Направления тока и линий магнитной индукции показаны на рисунке. Система, предоставленная сама себе, начинает двигаться из состояния покоя таким образом, что брусок $m_1$ скользит вверх по плоскости. Определите скорость бруска $m_1$ спустя время $\tau$ = 1 с после начала движения. Индукционным током в стержне пренебречь. Ускорение свободного падения принять равным $g$ = 10 м/с$^2$. Ответ дать в метрах в секунду (м/с), округлив его до десятых. В поле ответа введите только число.*

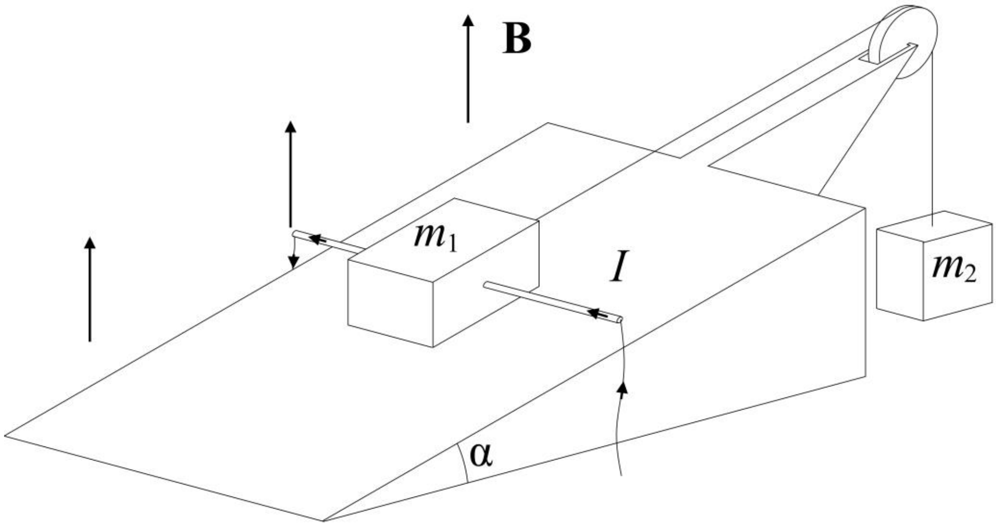



Рис. 17. Система тел (общий вид)

Предлагаемая в демонстрационном варианте задача является комплексной. Основной темой задания является динамика поступательного движения материальной точки, также в задачу включены элементы электромагнетизма и кинематики.

Решение задачи следует начать с записи «Дано», указав заданные в условии значения физических величин и искомую физическую величину. Все заданные значения следует перевести в СИ.

Дано:

$m_1 = 0{,}3$ кг

$m_2 = 0{,}5$ кг

$\alpha = 30^\circ$

$\mu = 0{,}2$

$l = 0{,}2$ м

$I = 5$ А

$B = 500$ мТл

$\tau = 1$ с

$B = 500$ мТл $= 0{,}5$ Тл

$\upsilon$ – ?

Следующим и очень важным этапом решения задач на динамику поступательного движения материальной точки является изображение поясняющего рисунка, на котором должны быть показаны все тела, о которых идёт речь в задаче, и связи между ними. На рисунке необходимо расставить силы, действующие на каждое тело, показать ускорение каждого тела, а также ввести удобную систему координат (рис. 18).

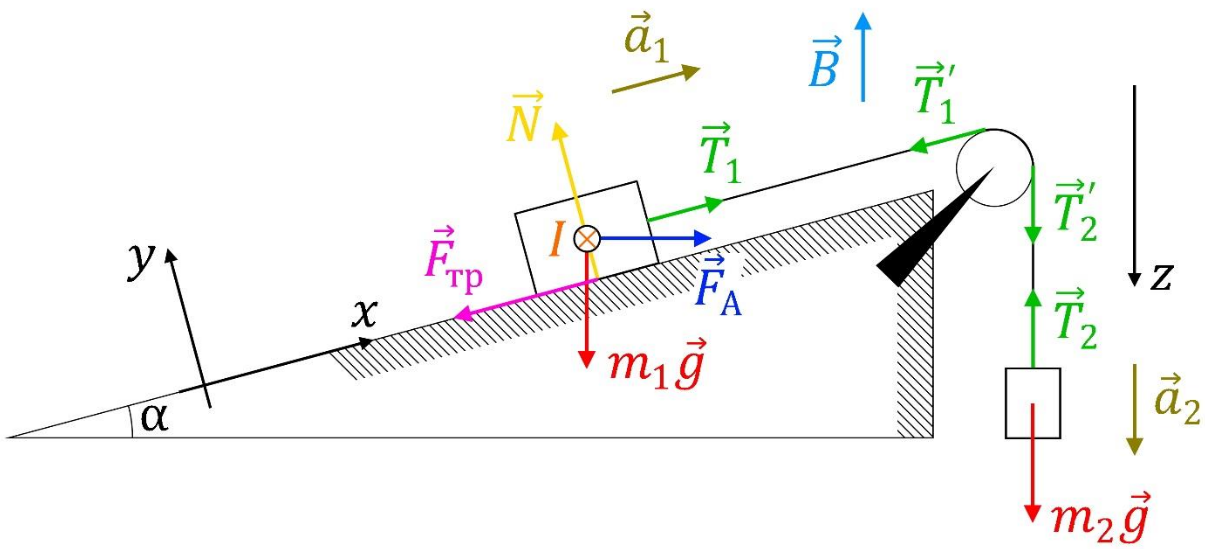



Рис. 18. Поясняющий рисунок

В условии данной задачи речь идёт о двух телах – деревянных брусках, связанных невесомой нерастяжимой нитью. Брусок массой $m_1$ находится на наклонной плоскости, на него действуют сила тяжести $m_1\vec{g}$, сила натяжения нити $\vec{T}_1$, сила реакции опоры $\vec{N}$, сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$. Также в условии задачи сказано, что в брусок $m_1$ жёстко вставлен невесомый стержень длиной $l$, по которому течёт ток $I$, а вся система тел находится в вертикальном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$. Магнитное поле действует на стержень с силой Ампера $\vec{F}_{\text{А}}$, но, поскольку стержень жёстко связан с бруском $m_1$ и невесом, можно считать, что сила Ампера действует на брусок $m_1$. Направление действия силы Ампера определяется по правилу левой руки.

Брусок массой $m_2$ привязан к концу нити, который переброшен через невесомый свободно вращающийся блок. На брусок $m_2$ действуют сила тяжести $m_2\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}_2$.

После выхода системы тел из состояния покоя бруски начинают прямолинейное равноускоренное движение, брусок $m_1$ скользит вверх по плоскости с ускорением $\vec{a}_1$, а брусок $m_2$ движется вертикально вниз с ускорением $\vec{a}_2$.

Для описания динамики поступательного движения брусков в рамках данной задачи удобно ввести координатные оси $x$ и $y$ для бруска $m_1$ и $z$ для бруска $m_2$. Причём ось $x$ направлена вверх вдоль наклонной плоскости (сонаправлена с ускорением $\vec{a}_1$), ось $y$ – вверх перпендикулярно наклонной плоскости, а ось $z$ – вертикально вниз (сонаправлена с ускорением $\vec{a}_2$).

Искомой физической величиной в задаче является скорость $v$ бруска $m_1$ спустя время $\tau$ после начала движения. С учётом того, что система движется равноускорено, для поиска скорости при заданном времени сначала нужно найти ускорение $a_1$ бруска $m_1$. Поэтому после изображения рисунка следует записать уравнения динамики поступательного движения тел в соответствии со вторым законом Ньютона (1), (2):

$$m_1\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{F}_{\text{А}} = m_1\vec{a}_1, \qquad (1)$$

$$m_2\vec{g} + \vec{T}_2 = m_2\vec{a}_2. \qquad (2)$$

Затем необходимо выявить дополнительные соотношения в условии данной задачи.

Нерастяжимость нити позволяет считать одинаковыми по модулю скорости и ускорения всех её точек, поэтому будут одинаковыми модули ускорений брусков (3)

$$a_1 = a_1 = a. \qquad (3)$$

Невесомость и нерастяжимость нити позволяет считать силу натяжения вдоль нити постоянной по модулю. Неизменяемость силы натяжения при переходе через блок может быть доказана при условии, что массой блока можно пренебречь. Таким образом, выполняется соотношение (4)

$$T_1 = T_1' = T_2 = T_2' = T. \qquad (4)$$

Сила трения будет являться силой трения скольжения (5)

$$F_{\text{тр}} = \mu N. \qquad (5)$$

Сила Ампера, действующая на прямой проводник с током, при условии, что магнитное поле является однородным, может быть найдена в соответствии с выражением (6)

$$\vec{F}_{\text{А}} = I \cdot [\vec{l}, \vec{B}], \qquad (6)$$

где $\vec{l}$ – вектор, длина которого равна длине стержня $l$, а направление совпадает с направлением тока $I$.

Поскольку ток в проводнике и линии магнитной индукции направлены взаимно перпендикулярно, модуль силы Ампера может быть найден по формуле (7)

$$F_{\text{А}} = IlB. \quad (7)$$

На следующем шаге решения задачи нужно записать векторные уравнения (1), (2) в проекции на координатные оси, при этом полностью или частично учитывая выявленные дополнительные соотношения. Запись уравнения (1) в проекции на оси $x$ и $y$ и уравнения (2) в проекции на ось $z$ с учётом соотношений (3) – (7) выглядит следующим образом (8) – (10)

$$-m_1 g \sin\alpha + T - \mu N + IlB\cos\alpha = m_1 a, \quad (8)$$
$$-m_1 g \cos\alpha + N - IlB\sin\alpha = 0, \quad (9)$$
$$m_2 g - T = m_2 a. \quad (10)$$

В результате решения системы уравнений (8) – (10) относительно ускорения $a$ получается, что

$$a = \frac{m_2 g - m_1 g(\sin\alpha + \mu \cdot \cos\alpha) + IlB(\cos\alpha - \mu \cdot \sin\alpha)}{m_1 + m_2}. \quad (11)$$

При равноускоренном движении бруска $m_1$ вдоль оси $x$, зависимость его скорости от времени можно записать в следующем виде (12)

$$\upsilon_x(t) = \upsilon_{x0} + a_x t. \quad (12)$$

С учётом того, что начальная скорость $\upsilon_{x0}$ бруска $m_1$ равна нулю, а его скорость и ускорение в процессе движения направлены вдоль оси $x$, скорость $\upsilon$ бруска $m_1$ спустя время τ после начала движения может быть найдена по формуле

$$\upsilon = a\tau,$$

а с учётом (11)

$$\upsilon = \frac{m_2 g - m_1 g(\sin\alpha + \mu \cdot \cos\alpha) + IlB(\cos\alpha - \mu \cdot \sin\alpha)}{m_1 + m_2}\tau. \quad (13)$$

Ниже представлен расчёт скорости $\upsilon$

$$\upsilon =$$
$$= \frac{0{,}5 \cdot 10 - 0{,}3 \cdot 10 \cdot (\sin 30° + 0{,}2 \cdot \cos 30°) + 5 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}5 \cdot (\cos 30° - 0{,}2 \cdot \sin 30°)}{0{,}3 + 0{,}5} \cdot 1 =$$
$$= 4{,}2042 \approx 4{,}2\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$$

Ответ: 4,2.

Ниже разобраны типичные ошибки, которые могут быть допущены при решении задачи.

1. Неверное определение силы нормальной реакции опоры $\vec{N}$.

Сила нормальной реакции опоры $\vec{N}$ всегда направлена перпендикулярно поверхности, на которой находится тело, и по величине равна силе, с которой тело давит на поверхность, – весу тела. Сила $\vec{N}$ распределена по площади соприкосновения тела и поверхности.

Часто учащиеся допускают ошибку, заключающуюся в том, что приравнивают величины сил нормальной реакции опоры и тяжести $N = mg$. Нужно заметить, что в общем случае равенство $N = mg$ несправедливо. Для определения силы реакции опоры необходимо провести анализ уравнения, записанного по второму закону Ньютона в проекции на ось, перпендикулярную поверхности, на которой находится тело. В рассматриваемой задаче таким является уравнение (9), записанное для бруска $m_1$ в проекции на ось $y$ (рис. 18). Из этого уравнения можно выразить $N$

$$N = m_1 \, g \cos\alpha + IlB \sin\alpha.$$

Анализ полученного выражения показывает, что сила нормальной реакции опоры в условии рассматриваемой задачи определяется суммой составляющих сил тяжести $m_1\vec{g}$ и Ампера $\vec{F}_{\text{А}}$ вдоль оси $y$.

2. Ошибочное определение силы трения $\vec{F}_{\text{тр}}$.

Если физическое тело находится на поверхности и к нему приложена внешняя сила, имеющая составляющую вдоль поверхности, то возникает сила трения, действующая на тело со стороны поверхности (если в условии задачи не сказано, что поверхность гладкая). Сила трения препятствует скольжению тела вдоль поверхности.

Если под действием внешней силы тело остаётся в состоянии покоя относительно поверхности, то силу трения называют силой трения покоя. Она направлена вдоль поверхности противоположено скорости тела, которую оно приобрело бы относительно поверхности под действием внешней силы, если бы поверхность была гладкой.

Если тело скользит по поверхности под действием внешней силы, то силу трения называют силой трения скольжения. Сила трения скольжения всегда направлена вдоль поверхности противоположено скорости тела относительно поверхности.

В условии рассматриваемой задачи при предоставлении системы тел самой себе брусок $m_1$ скользит вверх по плоскости, поэтому сила трения направлена вниз вдоль плоскости.

Участники часто допускаю ошибку, используя для силы трения скольжения формулу $F_{\text{тр.ск.}} = \mu mg$, которая в общем случае несправедлива. Эта ошибка, как правило, является следствием предыдущей разобранной ошибки, связанной с неверным определением силы нормальной реакции опоры. Верное выражение для силы трения скольжения $F_{\text{тр.ск.}} = \mu N$. При этом следует сделать два замечания. Во-первых, сила трения покоя не может быть больше силы трения скольжения $F_{\text{тр.п.}} \leq F_{\text{тр.ск.}}$. Во-вторых, также различают силу трения качения, но она не имеет отношения к условию рассматриваемой задачи.

3. Неправильное определение силы Ампера $\vec{F}_{\text{A}}$.

При решении рассматриваемой задачи необходимо учесть действие силы Ампера на брусок $m_1$. Следует отметить, что направление силы Ампера определяется исключительно направлением силы тока в стержне и направлением вектора магнитной индукции и не зависит от характера и направления движения брусков. Направление силы Ампера определяется по правилу левой руки: если расположить левую руку так, что четыре пальца будут направлены вдоль тока, а линии магнитной индукции будут входить в ладонь, то отогнутый большой палец покажет направление силы Ампера. В условии рассматриваемой задачи ток направлен «от нас», а магнитная индукция – вертикально вверх (рис. 18), поэтому сила Ампера направлена горизонтально вправо.

Также направление силы Ампера можно определять как направление результата векторного произведения $\left[\vec{l}, \vec{B}\right]$ в правой части выражения (6).

Стоит заметить, что сила Ампера всегда перпендикулярна как направлению тока $I$, так и магнитной индукции $\vec{B}$.

Задание №9 считается выполненным, если ответ учащегося совпал с эталоном. Выполненное задание оценивается в 8 баллов.

***Задание №12.*** *На концах однородного тонкого стержня длиной $\ell = 0{,}9$ м массой $m$ закреплены два маленьких шарика массами $3m$ и $4m$ (рис. 19).*

*Стержень опирается на острый край опоры (точка О), который отстоит от шарика массой 3m на расстояние ℓ/3. Для того чтобы стержень находился в равновесии в горизонтальном положении, его прикрепляют к тонкой невесомой нерастяжимой нити, которая отклонена от вертикали на угол $\alpha$ = 60° (точка крепления нити к стержню – точка А) и выдерживает максимальную силу натяжения $T_{max} = 6mg$, где $g$ – ускорение свободного падения. При этом расстояние от точки опоры О до точки крепления нити А оказалось минимально возможным.*

*Затем нить перерезают и определяют новое положение острого края опоры – точку $O_1$, чтобы стержень снова оказался в равновесии в горизонтальном положении. Определите длину получившегося отрезка $O_1A$.*

*Ответ выразите в единицах СИ в виде десятичной дроби, округлив до сотых. В поле ответа запишите число с двумя значащими цифрами после запятой.*

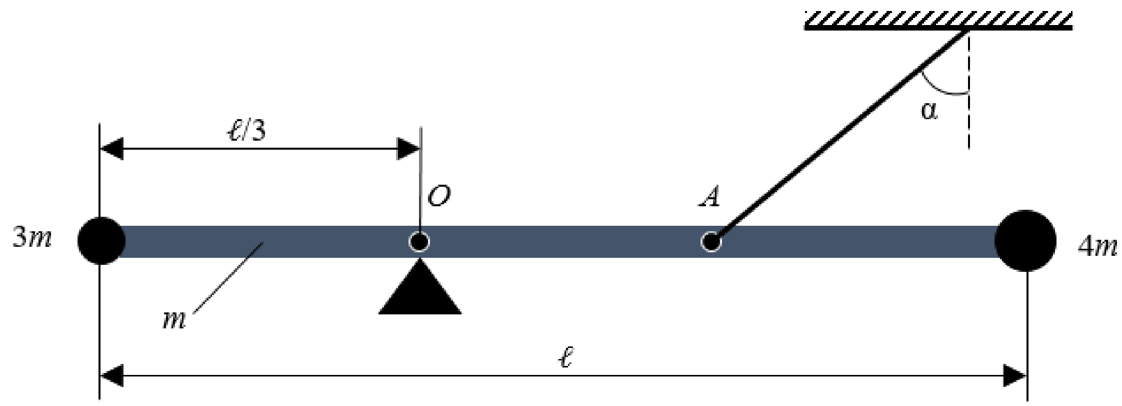



Рис. 19. Равновесие системы тел (общий вид)

В данной задаче для рассматриваемой системы тел (стержня с закреплёнными на его концах шариками) используется модель абсолютно твёрдого тела – тела, у которого расстояние между любыми точками можно считать неизменным. Стержень опирается на острую опору и поэтому может одновременно участвовать в поступательном и вращательном движении. Под равновесием понимается сохранение телом состояния покоя или равномерного прямолинейного движения. Будем считать, что стержень может свободно поворачиваться (не соскальзывая) относительно острого края опоры.

Для равновесия абсолютно твёрдого тела под действием внешних сил необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два условия:

1) первое условие равновесия – равенство нулю векторной суммы всех внешних сил, приложенных к телу:

$$\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\ldots+\vec{F}_N=0; \tag{1'}$$

2) второе условие равновесия – равенство нулю суммы моментов всех внешних сил, приложенных к телу, относительно произвольной оси $Z$:

$$\sum_{i=1}^{N}M_Z\left(\vec{F}\right)_i=0. \tag{2'}$$

Выберем инерциальную систему отсчёта, связанную с Землёй. Расставим все силы, действующие на тела системы в исходном состоянии, а также обозначим все характерные расстояния, которые в дальнейшем будут использоваться для нахождения плеч сил (рис. 20).

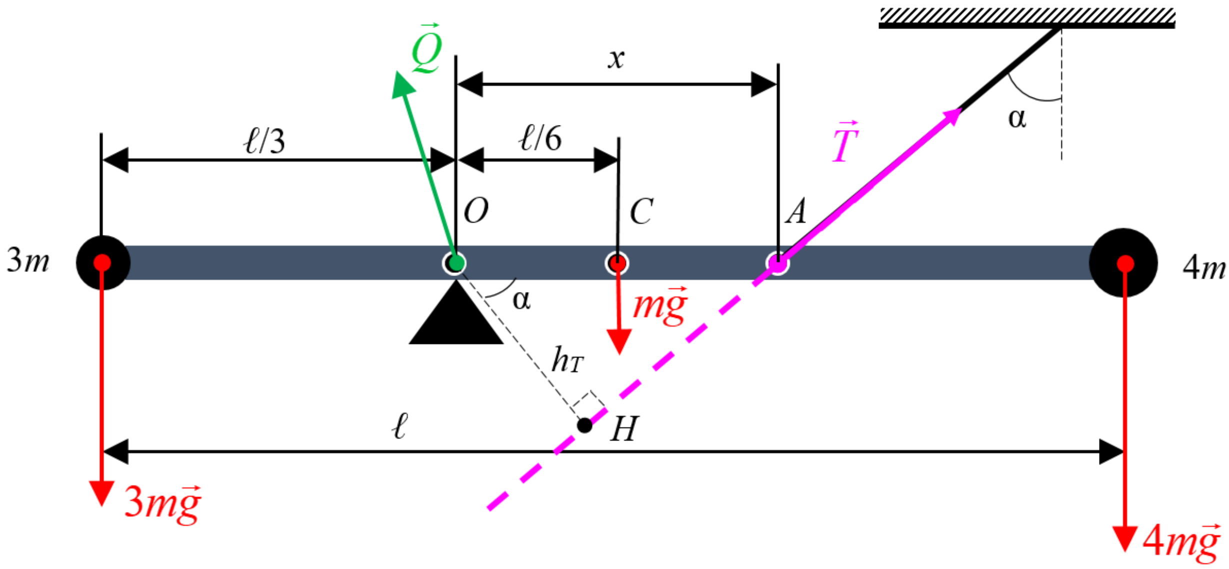



Рис. 20. Силы, действующие на тела системы в исходном состоянии, и характерные геометрические размеры

Вначале определим минимально возможное расстояние от точки опоры $O$ до точки крепления нити $A$, обозначив это расстояние как переменную $x$.

На шарики массами $3m$ и $4m$, которые будем считать материальными точками, действуют силы тяжести $3m\vec{g}$ и $4m\vec{g}$. На стержень, который в виду его протяжённости нельзя считать материальной точкой, действует сила тяжести $m\vec{g}$, приложенная к центру тяжести стержня. Если в пределах протяжённого тела поле силы тяжести приблизительно однородно, то центр тяжести тела совпадает с его центром масс. У однородного тонкого стержня центр масс расположен в его середине (точка $C$ на рис. 20). Поскольку расстояние от левого конца стержня (где расположен шарик массой $3m$) до точки $O$ равно $\ell/3$, то расстояние между точками $O$ и $C$ получается равным $\ell/6$. Также на стержень действует сила натяжения нити $\vec{T}$, направленная вдоль нити и приложенная к точке $A$, и сила реакции $\vec{Q}$ со стороны опоры, приложенная к точке $O$ и направленная под некоторым углом к вертикали.

Запишем первое условие равновесия согласно (1’):

$$3m\vec{g} + 4m\vec{g} + m\vec{g} + \vec{T} + \vec{Q} = 0. \qquad (3')$$

Как известно, моментом $M$ силы $\vec{F}$ относительно некоторой оси $Z$ называется произведение модуля силы $F$ на плечо $h$. Плечом $h$ называется перпендикуляр, опущенный из точки, относительно которой рассматривается вращение, на линию действия силы $\vec{F}$. Момент силы будем считать положительным, если сила вызывает вращение против часовой стрелки, и отрицательным, если сила вызывает вращение по часовой стрелке.

В уравнение (3’) входит неизвестная сила реакции опоры $\vec{Q}$. Однако эту силу можно исключить из рассмотрения, если применить второе условие равновесия согласно (2’), выбрав ось, проходящую через точку опоры $O$ перпендикулярно плоскости рисунка. Тогда момент силы $\vec{Q}$ относительно выбранной оси будет равен нулю.

Запишем второе условие равновесия относительно оси, проходящей через точку опоры $O$ перпендикулярно плоскости рисунка, согласно (2’):

$$M_O\left(3m\vec{g}\right)+M_O\left(4m\vec{g}\right)+M_O\left(m\vec{g}\right)+M_O\left(\vec{T}\right)+M_O\left(\vec{Q}\right)=0. \qquad (4')$$

Составим таблицу, в которой укажем величины плеч и моментов сил, входящих в уравнение (4’), в соответствии с обозначениями на рис. 20. Отметим, что плечом $h_T$ силы $\vec{T}$ будет являться длина перпендикуляра *OH*, опущенного из точки *O* на линию действия силы $\vec{T}$.

| **Сила** | **Плечо силы относительно т. *O*** | **Момент силы относительно т. *O*** |
|---|---|---|
| $3m\vec{g}$ | $\ell/3$ | $3mg\cdot\ell/3$ |
| $4m\vec{g}$ | $2\ell/3$ | $-4mg\cdot 2\ell/3$ |
| $m\vec{g}$ | $\ell/6$ | $-mg\cdot\ell/6$ |
| $\vec{T}$ | $x\cdot\cos\alpha$ | $T\cdot x\cdot\cos\alpha$ |
| $\vec{Q}$ | 0 | 0 |

Уравнение (4’) тогда запишем в виде:

$$3mg\cdot\frac{\ell}{3}-4mg\cdot\frac{2\ell}{3}-mg\cdot\frac{\ell}{6}+T\cdot x\cdot\cos\alpha=0. \qquad (5')$$

В уравнении (5’) присутствует две неизвестные: модуль силы натяжения *T* и расстояние *x* от точки *O* до точки *A*. Причём чем меньше расстояние *x*, тем больше будет величина модуля силы натяжения *T* для сохранения неизменным момента этой силы.

Из условия задачи максимальный модуль силы натяжения нити равен величине 6*mg*. В этом случае расстояние *x* будет минимально возможным. При этом, очевидно, должно выполняться условие

$$0\le x\le 2\ell/3. \qquad (6')$$

Из (5’) находим минимальное значение *x*:

$$3mg\cdot\frac{\ell}{3}-4mg\cdot\frac{2\ell}{3}-mg\cdot\frac{\ell}{6}+6mg\cdot x\cdot\cos\alpha=0;$$

$$-\frac{11\ell}{6}+6\cdot x\cdot\cos\alpha=0;$$

$$x=\frac{11\ell}{36\cos\alpha}; \qquad (7')$$

для удобства дальнейшей проверки подставим числовые значения:

$$x = \frac{11\ell}{36\cos\alpha} = \frac{11 \cdot 0{,}9}{36 \cdot 0{,}5} = 0{,}55 \text{ м}. \qquad (8')$$

Проверим ответ (8’) на соответствие ограничению (6’):

$$x = 0{,}55 \text{ м} < 2\ell/3 = 0{,}6 \text{ м},$$

т.е. найденное значение $x$ попадает в требуемый интервал (6’).

Далее во второй части задачи известно, что нить перерезают. Сохранение равновесия стержня без изменения положения точки опоры невозможно. Поскольку суммарный модуль сил тяжести, действующих на шарик массой $4m$ и стержень массой $m$ (справа от точки $O$), больше, чем сила тяжести, действующая на шарик массой $3m$ (слева от точки $O$), и при этом плечо силы $4m\vec{g}$ в исходной ситуации больше плеча силы $3m\vec{g}$, предположим, что новую точку опоры $O_1$ следует расположить правее центра масс стержня $C$ (рис. 21), чтобы стержень снова оказался в равновесии в горизонтальном положении.

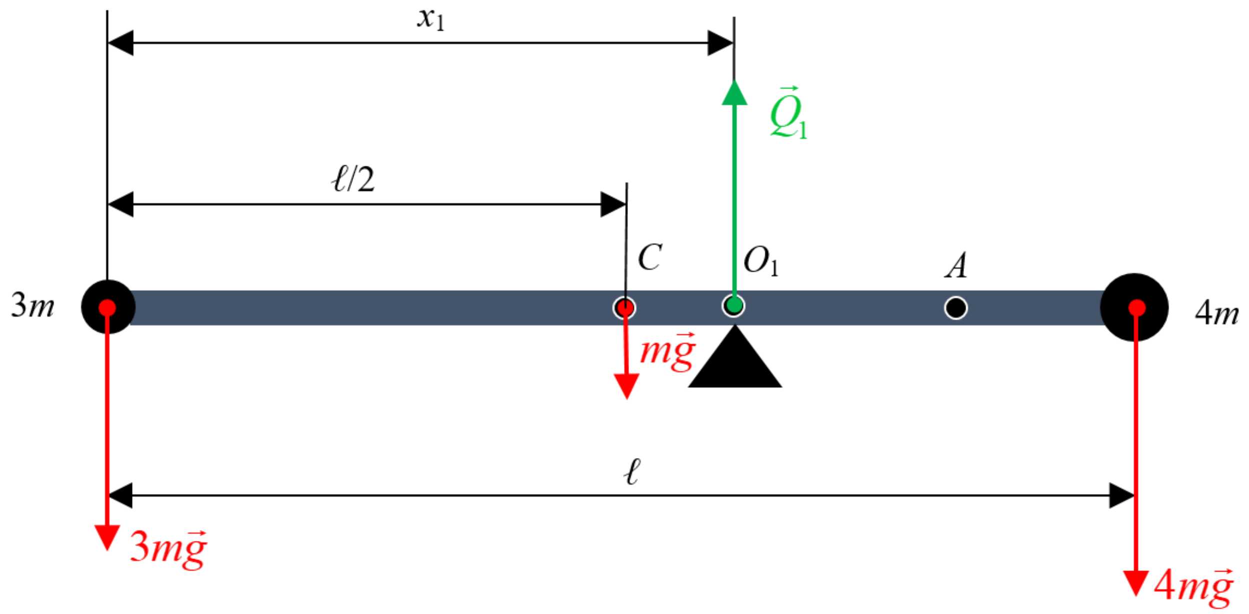



Рис. 21. Силы, действующие на тела системы после перерезания нити, и характерные геометрические размеры

Снова отметим, что если заранее выбрать ось вращения, проходящую через точку опоры $O_1$ перпендикулярно плоскости рисунка, то момент силы

$\vec{Q}_1$ относительно выбранной оси будет равен нулю. Первое условие равновесия (1’) по аналогии с (3’) будет иметь вид

$$3m\vec{g} + 4m\vec{g} + m\vec{g} + \vec{Q}_1 = 0,$$

однако из него можно найти только величину силы $\vec{Q}_1$, которая не требуется в дальнейшем. Найдём положение точки $O_1$ относительно левого края стержня, обозначив расстояние от шарика массой $3m$ до точки $O_1$ за $x_1$. При этом, очевидно, должно выполняться условие

$$\frac{\ell}{2} \le x_1 \le \ell . \qquad (9’)$$

Второе условие равновесия (2’) по аналогии с (5’) будет иметь вид:

$$3mg \cdot x_1 - 4mg \cdot (\ell - x_1) + mg \cdot \left( x_1 - \frac{\ell}{2} \right) = 0. \qquad (10’)$$

Из (10’) находим решение $x_1 = \frac{9}{16}\ell$, удовлетворяющее условию (9’).

Таким образом, в первой части задачи мы определили положение точки $A$ относительно исходной точки опоры $O$, а во второй части задачи – положение точки $O_1$ относительно левого края стержня. Чтобы определить длину отрезка $O_1A$, найдём положение точки $A$ относительно левого края стержня (рис. 22).

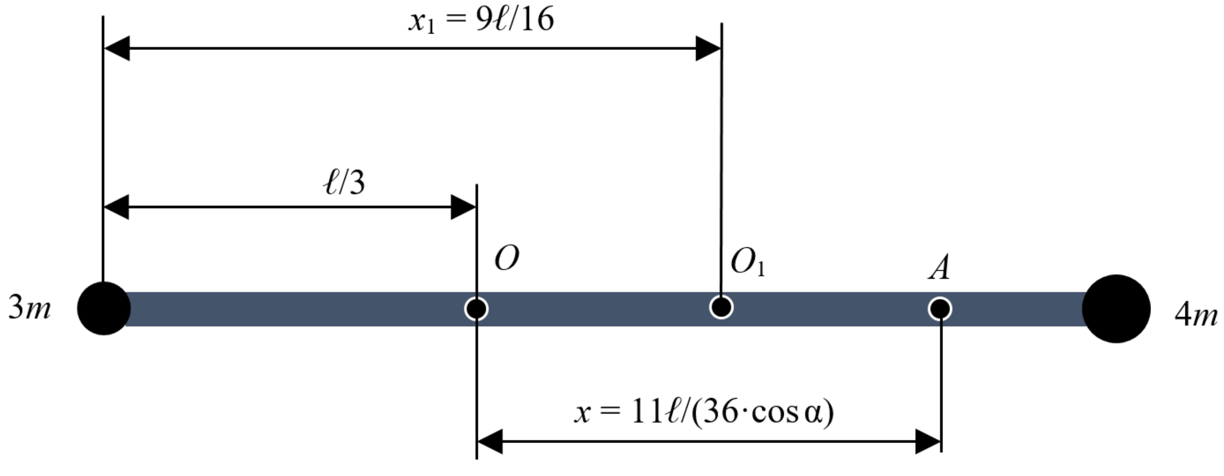



Рис. 22. К определению величины отрезка $O_1A$

Из рис. 22 следует, что

$$O_1A = \frac{11\ell}{36\cdot\cos\alpha} + \frac{\ell}{3} - \frac{9\ell}{16} = \frac{\ell}{144}\left(\frac{44}{\cos\alpha} - 33\right). \qquad (11')$$

Подставим в (11’) числовые значения:

$$O_1A = \frac{0{,}9}{144}\left(\frac{44}{0{,}5} - 33\right) = 0{,}34375\ \text{м}. \qquad (12')$$

По условию задачи найденное числовое значение (12’) длины отрезка $O_1A$ требуется выразить в единицах СИ в виде десятичной дроби, округлив до сотых. Поскольку исходное значение длины отрезка подставлено в метрах, ответ уже выражен в единицах СИ. После округления получим величину 0,34 м. В ответ записываем число без указания единицы измерения.

Ответ: 0,34.

Ниже разобраны типичные ошибки, которые могут быть допущены при решении задачи.

1. Плечо силы определяется именно как перпендикуляр, опущенный из точки, относительно которой рассматривается вращение, на линию действия силы, а не расстояние между точкой, относительно которой рассматривается вращение, и точкой приложения силы. В частности, на рис. 20 ошибочно было бы указать величину плеча силы $\vec{T}$ как длину отрезка *OA*. Здесь же следует отметить необходимость правильного определения, какой из углов в получившемся прямоугольном треугольнике *OAH* равен α.

2. Необходимо учитывать наличие силы тяжести, действующей на стержень, и её момента относительно точки опоры (при решении задачи часто про эту силу забывают). Также нужно правильно определить точку приложения этой силы, а именно, центр масс стержня *C*, а не точку опоры *O*.

3. В предлагаемом решении для удобства расчётов в выражении (5’) в качестве переменной *x* выбрана длина отрезка *OA* (рис. 20), т.е. положение точки *A* найдено относительно точки опоры *O*. Поскольку во второй части задачи положение точки $O_1$ найдено относительно левого края стержня (рис. 21, величина $x_1$), необходимо пересчитать положение точки *A* также

относительно левого края стержня. Безусловно, допускается в первой части задачи найти положение точки *A* сразу относительно левого края стержня, но тогда выражение (5’) получится более громоздким. Выбор способа решения остаётся за учащимся.

Задание №12 считается выполненным, если ответ учащегося совпал с эталоном. Выполненное задание оценивается в 8 баллов.

**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ**

**по решению задания №2 по предмету «Информатика»**

**в рамках теоретического этапа Московского конкурса межпредметных навыков и знаний «Интеллектуальный мегаполис. Потенциал», номинация «Инженерный класс», Инженерно-техническое направление**

Методические рекомендации по использованию демонстрационных материалов и проведению теоретического этапа Московского конкурса межпредметных навыков и знаний «Интеллектуальный мегаполис. Потенциал» (далее – Конкурс) предназначены для участников Конкурса и учителей, ведущих профильную подготовку учащихся предпрофессиональных классов, с целью разъяснения хода решения задания демонстрационного варианта по предмету «Информатика», возможных трудностей при подготовке к Конкурсу, типичных ошибок, методики оценки.

Для решения задания №2 требуется знать понятие алгоритма, свойства алгоритмов, базовые алгоритмические конструкции, основы построения алгоритмов решения типовых задач, а также уметь анализировать информацию, представленную в тексте задачи и в блок-схеме, записывать алгоритмические конструкции на языке блок-схем.

*Алгоритм* – это строго определённая последовательность действий, выполнение которых приводит к решению поставленной задачи за конечное число шагов.

Алгоритм должен обладать следующими свойствами:

- *Понятность* – каждая команда должна входить в систему команд исполнителя и трактоваться им однозначно.
- *Дискретность* – алгоритм должен быть разбит на ряд отдельных законченных команд (шагов), каждая из которых должна быть выполнена прежде, чем исполнитель перейдёт к выполнению следующей.
- *Детерминированность* (*точность, определённость*) – команда алгоритма исполнителем должна пониматься однозначно. Не должно быть

двоякого толкования команды. Разветвления в алгоритме допускаются только по условию: если выполняется некоторое условие, то выполняются одни действия, в противном случае – другие.

- *Универсальность* (*массовость*) – алгоритм должен решать не одну конкретную задачу, а некоторый класс задач, различающихся лишь исходными данными. Исходные данные могут выбираться из некоторой области, которая называется *областью применимости алгоритма*. Однако эта универсальность не должна быть чрезмерной и не должна достигаться за счёт уменьшения эффективности.
- *Результативность* и *конечность* – за конечное число шагов алгоритм либо должен приводить к решению задачи, либо после конечного числа шагов останавливаться из-за невозможности получить решение (с выдачей соответствующего сообщения), либо неограниченно продолжаться в течение времени, отведённого для исполнения алгоритма, с выдачей промежуточных результатов.

Алгоритмы существуют не только в программировании. Любой процесс мы можем представить в виде алгоритма, например, выполнение домашнего задания:

1. Открыть электронный журнал-дневник.
2. Выбрать предмет.
3. Если домашнее задание записано, приступить к его выполнению, используя учебные пособия, электронные ресурсы, конспекты в тетради.
4. Если домашнее задание по предмету выполнено или отсутствует, перейти к другому предмету, пока все необходимые домашние задания не будут выполнены.
5. Закрыть электронный журнал-дневник.

Все существующие алгоритмы делятся на три вида: линейные, ветвящиеся и циклические.

1. *Линейный алгоритм* при каждом исполнении предписывает однократное выполнение всех действий алгоритма в определённой последовательности.

2. *Ветвящийся алгоритм* описывает несколько возможных последовательностей действий и при каждом исполнении предписывает выполнение одной из последовательностей действий в зависимости от определённых условий.

3. *Циклический алгоритм* при каждом исполнении предписывает многократное выполнение одной и той же последовательности действий.

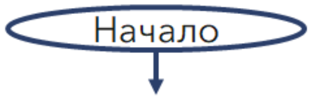
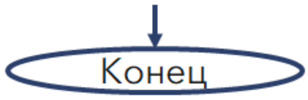
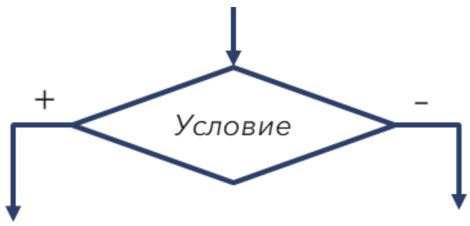
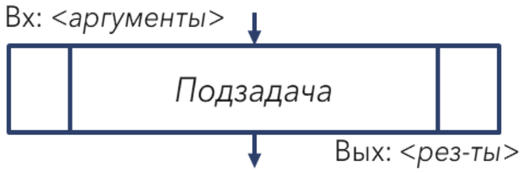
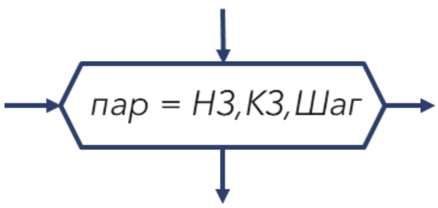
*Вспомогательный алгоритм* – это алгоритм, который можно использовать в других алгоритмах, указав только его имя. Например, при перемножении двух чисел необходимо умножить первое число на каждую цифру второго и сложить полученные результаты. Таким образом, в данном случае алгоритм сложения чисел выступает как вспомогательный, хотя в других случаях он может использоваться как самостоятельный.

Существуют различные способы описания алгоритмов. Алгоритм может быть описан на естественном языке или же на каком-либо формализованном языке (существуют специальные формальные языки с ограниченным набором слов и строгими правилами записи, например, псевдокод), с помощью формул или графического представления.

*Язык блок-схем* – это язык формального графического представления алгоритмов. Он широко применяется для записи алгоритмов, которые должны быть реализованы в виде компьютерной программы, т.к. его организация позволяет легко переходить к записи алгоритма на выбранном языке программирования, и кроме того, он обладает хорошей наглядностью.

Ниже в таблице 1 представлены *основные элементы блок-схем*.

*Таблица 1. Элементы блок-схем*

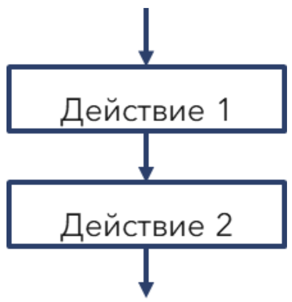
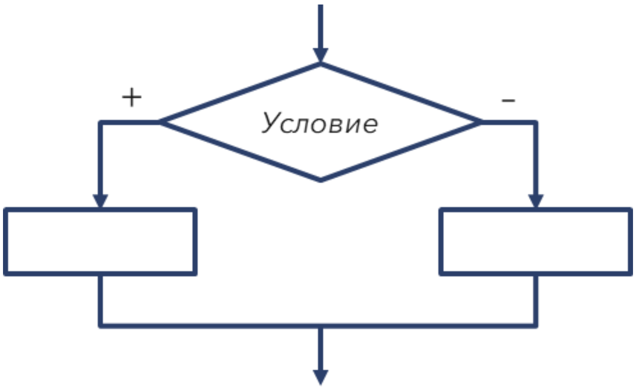
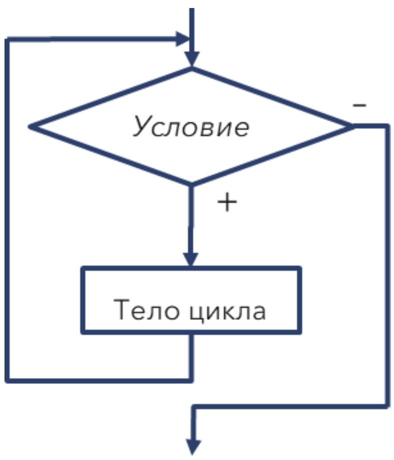
| **Вид блока** | **Назначение блока** |
|---|---|
|  | Начало алгоритма. Имеет *единственную* стрелку – выходящую. |
|  | Конец алгоритма. Имеет *единственную* стрелку – входящую. |
|  | Блок для ввода или печати (вывода) значений переменных без уточнения способа печати. При необходимости, можно вывести сообщение константной строкой. |
|  | В этом блоке записываются простые инструкции, действия, вычисления. Например, присвоение переменным некоторых значений. |
|  | Блок проверки условия. Имеет одну входящую и две выходящие стрелки. Условие принимает значения «*истина*» или «*ложь*». |
|  | Подзадача – вспомогательный алгоритм, который описывается отдельной блок-схемой, а в программе часто – отдельной подпрограммой (процедурой или функцией). |
|  | Блок для обозначения *параметрического* цикла, где *НЗ* – начальное значение параметра, *КЗ* – конечное значение параметра, *Шаг* показывает, на какую величину изменяется параметр каждую итерацию (обычно эта величина равна 1). |

Существуют следующие *базовые управляющие структуры*:

- Следование;
- Ветвление;
- Цикл.

Ниже в таблице 2 приведён их графический вид и пояснения.

*Таблица 2. Базовые управляющие структуры*

| Вид структуры | Название и пояснение |
|---|---|
|   | **Следование** – это линейная структура со строгой очередностью действий (команд) алгоритма. Блоки могут быть одного или разного вида. |
|   | **Ветвление** – структура с выбором выполнения либо одного набора действий (команд), либо другого, в зависимости от выполнения условия. Если действия при невыполнении условия отсутствуют, такой оператор называется «неполное ветвление». |
|   | **Цикл** – это структура, предназначенная для компактной записи многократного выполнения одного набора команд, которое принято называть телом цикла. Тело цикла может состоять и из одной команды, может содержать параметр, изменяющийся при выполнении команд, а может быть пустым. |

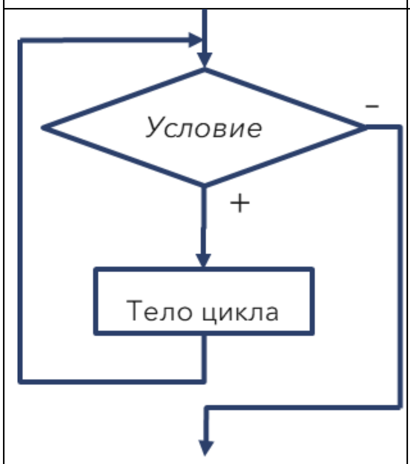
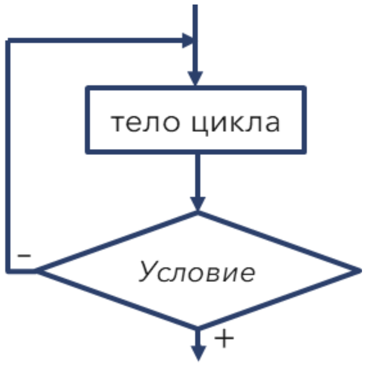
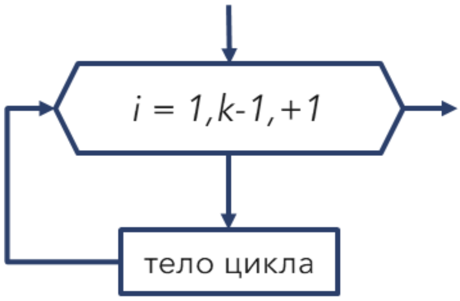
Циклы бывают итерационными и параметрическими.

*Итерационные* циклы – это циклы с заранее неизвестным числом повторений. К ним относятся цикл с предусловием (цикл ПОКА) и цикл с постусловием (цикл ДО).

*Параметрический* цикл – это цикл с некоторой переменной, которая изменяется при выполнении цикла от начального до конечного значения с некоторым шагом. Обычно эта переменная является счётчиком повторений цикла, но может иметь и другие смыслы.

Примеры графического изображения циклов и их описание на псевдокоде, C/C++ и Python приведены в таблице 3.

*Таблица 3. Виды циклов*

| ***Цикл с предусловием*** | ***Цикл с постусловием*** | ***Параметрический цикл*** |
|---|---|---|
|  |  |  |
| **На псевдокоде:** | | |
| **нц пока** <условие><br><тело цикла><br>**кц** | **нц**<br><тело цикла><br>**кц_при** <условие> | **цел i**<br>**нц** для i от 1 до k-1<br><тело цикла><br>**кц** |
| **На C/C++:** | | |
| **while(**<условие>**)**<br>**{**<br><тело цикла><br>**}** | **do {**<br><тело цикла><br>**} while(**<условие>**)** | **for** (int i = 1; i < k; i++)<br>**{**<br><тело цикла><br>**}** |
| **На Python:** | | |
| **while** <условие>**:**<br><тело цикла> | Особой конструкции для цикла с постусловием в Python не существует. | **for** i **in** range(1, k, 1)**:**<br><тело цикла> |

Параметрический цикл можно представить в виде цикла с предусловием. При этом надо помнить, что инициализация переменной-параметра происходит до цикла, а изменение параметра на некоторый шаг – самое последнее действие в цикле, выполняющееся после тела цикла.

Для правильной организации цикла необходимо выполнение ряда условий. Во-первых, хотя бы одна из переменных, входящих в условие цикла, должна меняться в теле цикла, иначе условие никогда не станет ложным, и цикл будет бесконечным. Во-вторых, это изменение должно приводить на каком-либо шаге к ложности условия. Например, если сначала переменная увеличивается на 1, а затем уменьшается на 1, условие никогда не станет ложным. При несоблюдении этих условий цикл становится бесконечным.

Приведём пример алгоритма вычисления факториала. На вход подаётся некоторое целое число *n*, от алгоритма ожидаем вывод значения *n!* Блок-схема алгоритма представлена на рис. 23. Поскольку значения множителей для вычисления факториала идут последовательно друг за другом, мы можем использовать параметрический цикл.

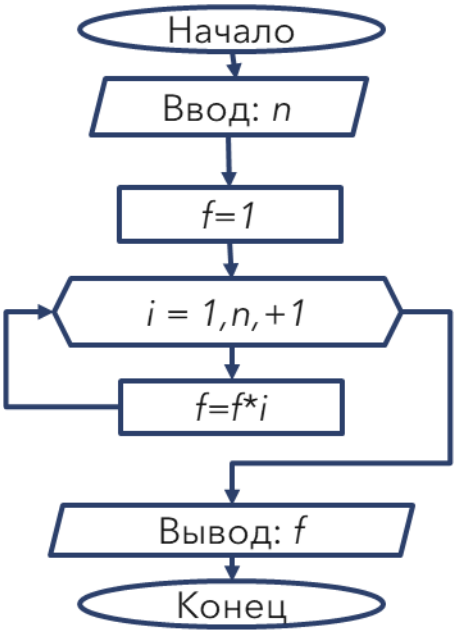



Рис. 23. Блок-схема алгоритма вычисления факториала

В приведённом алгоритме имеются конструкции «следование» (после ввода n следует инициализация f, потом следует цикл вычисления значения факториала, затем следует блок вывода f), а также цикл. Ниже в таблице 4 приведены коды вычисления факториала на псевдокоде, C++ и Python, соответствующие данной блок-схеме.

*Таблица 4. Примеры кодов, построенных по блок-схеме рис. 23*

| ***Псевдокод*** | ***C++*** | ***Python*** |
|---|---|---|
| **алг**<br>**нач**<br>**. цел** *n,f,i*<br>**. ввод**(*n*)<br>**.** ***f*****:=1**<br>**. нц для** *i* **от 1 до** *n*<br>**. .** *f*:=*f***i*<br>**. кц**<br>**. вывод** *f*<br>**кон** | #include <iostream><br>using namespace std;<br>int main()<br>{<br>    int n,f;<br>    cin>>n;<br>    f=1;<br>    for (int i = 1; i <= n; i++)<br>        f*=i;<br>    cout<<f;<br>    return 0;<br>} | n = int(input('Введите n: '))<br>f=1<br>for i in range(1,n+1,1):<br>    f=f*i<br>print(f) |

Рассмотрим другой пример. Вычисление корня уравнения $\boldsymbol{x_0}$ на отрезке [***a;b***] методом дихотомии (рис. 24).

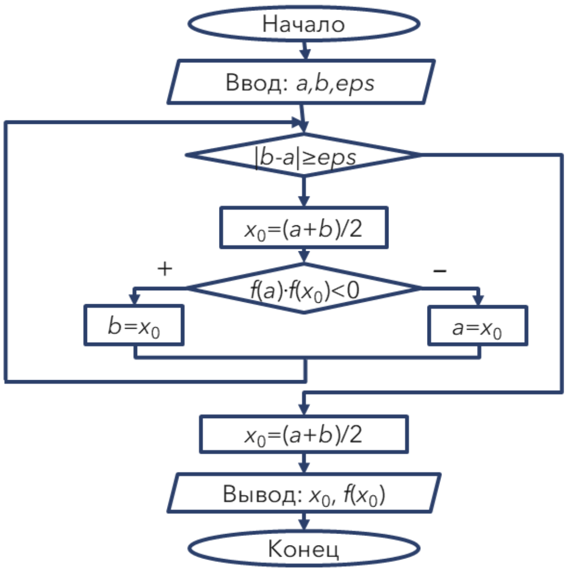



Рис. 24. Алгоритм нахождения корня уравнения методом дихотомии

Здесь уже используется цикл с предусловием, так как мы не можем заранее предсказать, сколько потребуется выполнить шагов метода, прежде чем будет найден корень.

Теперь проведём анализ решения ***задания №2*** демонстрационного варианта.

*На автоматизированном фрезерном станке с числовым программным управлением (ЧПУ) требуется изготовить из стальной пластины 15 х 5 см десять одинаковых квадратных деталей со стороной 2 см. Стажёр написал алгоритм, приведённый на рис. 25. Определите, получится ли у него вырезать достаточное количество нужных деталей по данному алгоритму. Если не получится, то выберите номер блока, в котором присутствует ошибка в алгоритме.*

*Полагаем, что пластина расположена таким образом, что точка входа (начальное положение фрезы) – левый верхний угол, соответствующий координатам (0,0), короткая сторона расположилась вдоль оси OY, а длинная сторона – вдоль оси OX. Переменная i – счётчик деталей. Всё время работы алгоритма считать, что режущий инструмент для вырезания деталей опущен и работает исправно.*

*Выберите один верный вариант ответа:*

*1) Получится.*

*2) Не получится, ошибка – в блоке 1.*

*3) Не получится, ошибка – в блоке 2.*

*4) Не получится, ошибка – в блоке 3.*

*5) Не получится, ошибка – в блоке 4.*

*6) Не получится, ошибка – в блоке 5.*

*7) Не получится, ошибка – в блоке 6.*

*8) Не получится, ошибка – в блоке 7.*

*9) Не получится, ошибка – в блоке 8.*

*10) Не получится, ошибка – в блоке 9.*

*11) Не получится, ошибка – в блоке 10.*

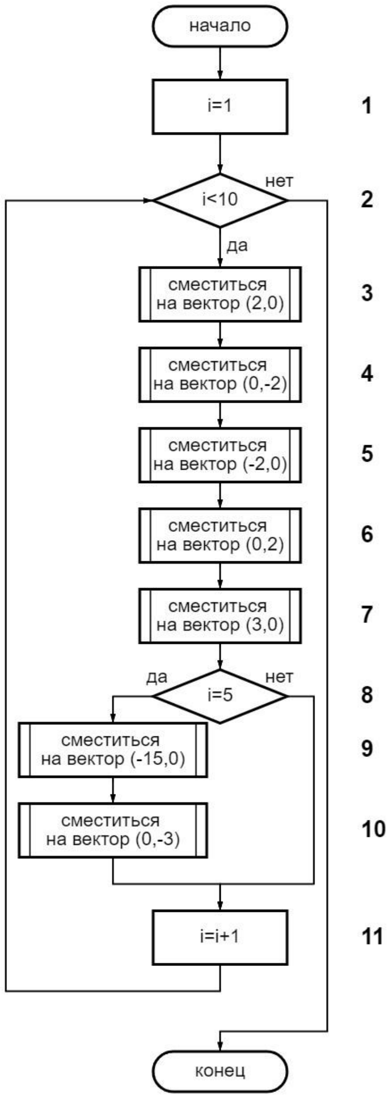



Рис. 25. Блок-схема алгоритма к заданию №2

Проанализируем алгоритм. Блок 1 – инициализация переменной *i*, отвечающей за номер детали. До начала цикла эта переменная принимает значение, равное 1. Далее идёт цикл до тех пор, пока $i$<10. Внутри цикла выполняются следующие действия: вырезается квадрат размером 2×2см, начиная с левого верхнего угла по часовой стрелке (блоки 3-6) и осуществляется переход к следующей детали (блок 7; режущий инструмент будет задавать левый верхний левый угол следующей детали). Далее в блоке 8 идёт сравнение номера детали с 5. Это сделано, чтобы понять, пора ли переходить к следующему ряду для вырезания деталей или нет. Как только 5 деталей будет вырезано, режущий инструмент будет переведён в начало второго ряда для вырезания деталей (блоки 9-10). Блок 11 отвечает за переход к следующему номеру детали.

В условии задачи сказано, что пластина имеет размеры 15 на 5 см и в начале работы алгоритма режущий инструмент находится в левом верхнем углу этой пластины (дадим ему координаты (0;0)). После выполнения первой итерации режущий инструмент окажется в позиции (3;0), как показано на рис. 26. То есть после каждой итерации режущий инструмент отдаляется от верхнего левого угла по длинной стороне на 3 см (в условии сказано, что длинная сторона расположена вдоль оси OX).

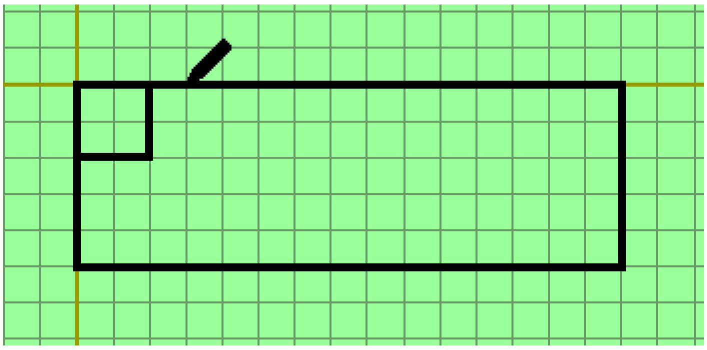


Рис. 26. Положение режущего инструмента после выполнения первой детали

После 5 повторений положение режущего инструмента будет в правом верхнем углу пластины (рис. 27).

3 * 5 = 15(см) – положение режущего инструмента после вырезания 5 деталей.

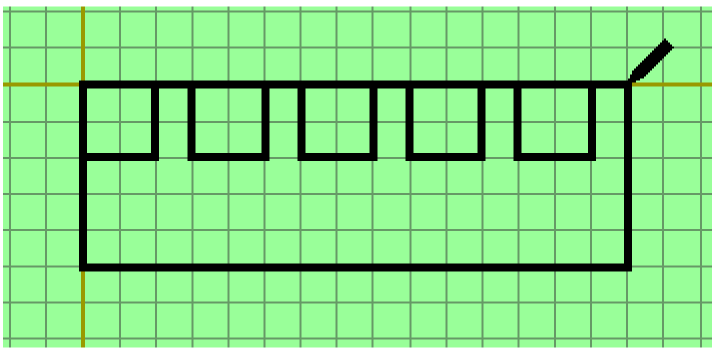


Рис. 27. Положение режущего инструмента после выполнения пятой детали

Далее выполнится условие в блоке 8, и режущий инструмент переместится в начало второго ряда. Перемещение состоит из двух действий: переместиться вдоль оси OX, затем переместиться вдоль оси OY.

После перехода ко второму ряду работа алгоритма продолжается ещё 4 раза. Это видно из ограничения в блоке 2 ($i<10$), то есть максимальное допустимое число деталей выходит 9, т.к. цикл начинался с $i=1$. Результат работы программы можно посмотреть на рис. 28. Поэтому ответ будет: **3) Не получится, ошибка – в блоке 2**.

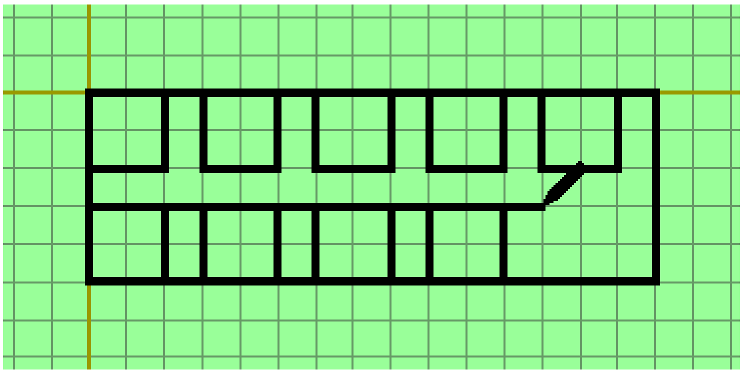


Рис. 28. Положение режущего инструмента после окончания работы алгоритма

Ещё раз проанализируем ответ. В вопросе было задано: «получится ли у стажёра вырезать *достаточное* количество нужных деталей по данному алгоритму». В данном случае мы получили только 9 деталей, поэтому ответ очевиден. Тут не рассматривается экономия материала.

Но предположим, что по количеству деталей всё будет в порядке. Тогда надо рассмотреть следующие 3 случая.

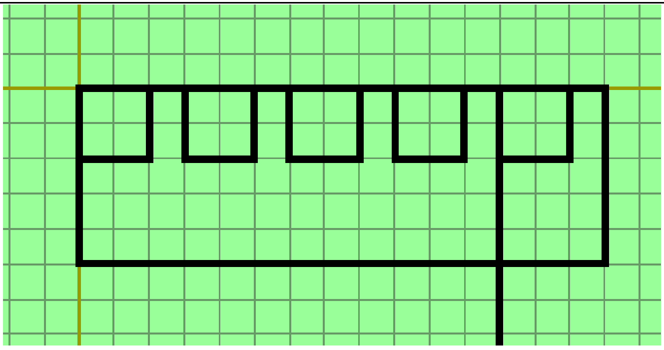
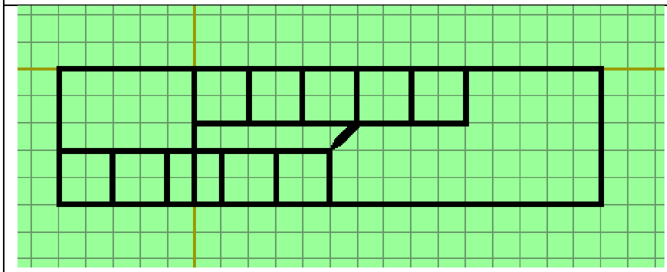
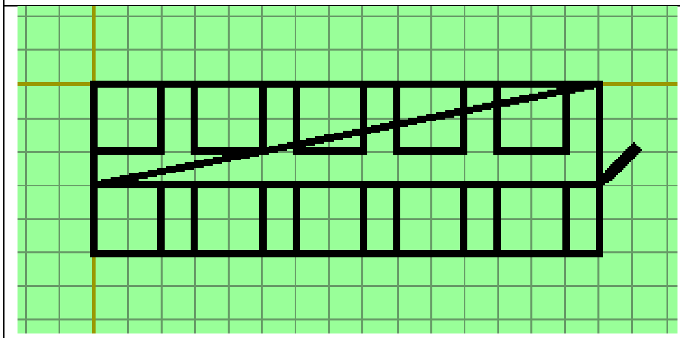
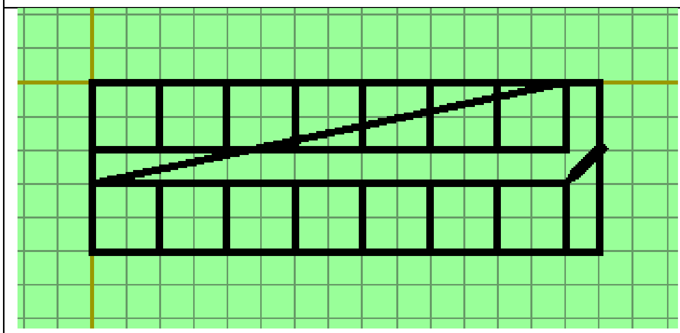
1) Ряды вырезания расположены в алгоритме соответственно пластине: длинный ряд вдоль длинной стороны.

2) Во время работы режущий инструмент не портит существующие или будущие фигуры.

3) Количество деталей может быть вырезано больше, главное, чтобы количество целых подходящих деталей соответствовало условию задачи.

В таблице 5 представлены возможные результаты работы подобных алгоритмов.

*Таблица 5. Примеры работы неправильно построенных алгоритмов*

| **Графическое изображение** | **Пояснение ошибки** |
|---|---|
|  | Перепутаны сдвиги по осям OX и OY (блоки 9-10) после вырезания определённого количества фигур. |
|  | Неверно выбран сдвиг по оси OX (блок 9) после вырезания определённого количества фигур (выход за границы пластины). Получаем всего 7 целых фигур. |
|  | Неверно передвинут режущий инструмент. Используется 1 блок перемещения вместо двух (блоки 9-10). |
|  | Несмотря на неверное перемещение режущего инструмента с конца первого ряда в начало второго, количество целых фигур кажется достаточным. По факту имеем только 9 целых фигур, т.к. фигуры с 3 по 7 испорчены лишними разрезами. |

Также не стоит забывать, что параметр цикла (переменная *i*) должен изменяться в соответствии с выбранным алгоритмом. В представленном алгоритме каждый квадрат вырезался отдельно. Но можно написать такой алгоритм, где за один проход в цикле будут вырезаться сразу два квадрата. В таком случае параметр цикла должен изменяться не на 1, а на 2, то есть получился бы блок 11 в следующем виде: i = i + 2.

Задание №2 считается выполненным, если ответ учащегося совпал с эталоном. Верно выполненное задание оценивается в 5 баллов.